



اشارات دانشگاه تهران

۲۷

بند سی و یکم

دکتر غنی‌نقی وحدتی

استاد دانشکده علوم

هندسه تحلیلی

اشارات دانشگاه تهران

۲۷

کتابخانه دانشگاه تهران
شماره ۱۲۵۰۰۰۴۰۰۴

بند تسلی

شماره ۷۸ تاریخ ۱۳۱۷/۴
کتابخانه وزارت معارف و اوقاف و صنایع
دولتی نو

دکتر عینقی وحدتی

استاد دانشکده علوم



۱۳۲۷

M.A.LIBRARY, A.M.U.



PE1272

هندسه تحلیلی

بخش نخست

بردارها

چندبهای راستا دار

۱ - چندبهای عددی و چندبهای راستا دار - چندبهاییکه با آنها سر و کار داریم بر حسب عدد و نوع عوامل ریاضی لازم جهت تعیینشان بدو دسته تقسیم میشوند .

اول آنهائیکه بوسیله یک مقایسه فقط با مقداری از نوع خودشان که واحد اختیار شده است کاملاً توسط یک عدد مشخص میشوند .

این عدد مثبت یا منفی و اندازه آن چندی بوده و چنین چندبها را اسکار نامند مثال طول - سطح - حجم - گوشه و غیره .

دوم آنهائیکه توسط یک عدد و یک سوی هندسی و گاهی توسط نقطه عملشان تعیین میشوند چنین چندبها را راستا دار و یابرداری نامند زیرا میتوان آنها را بوسیله یک بردار نمایش داد .

مثال - سرعت و یا شتاب یک نقطه مادی ، دوران یک جسم در حول یک محور و غیره .

۲ - بردار - بردار پاره خطی است محدود بین دو نقطه که یکی را آغاز و دیگری را انجام مینامیم . میتوان گفت که بردار پاره خط راستا دار است .

بردار را با دو حرف که اولی از سمت چپ آغاز و دومی انجام آنست نمایش داده و روی آن علامت سهم میگذاریم \overrightarrow{AB} اغلب اوقات آنرا جهت آسانی محاسبه با یک حرف مثلاً \vec{a} نیز نمایش میدهم .

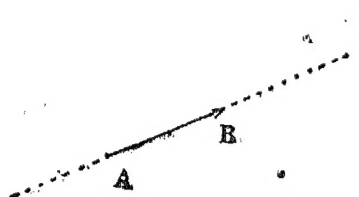
۳- عوامل يك بردار - چنانكه برداری داده شده باشد طول پاره خط آن يك چندی اسكالر بوده و چنانكه يك يكه طول انتخاب كنیم طول این پاره خط قدر مطلق آن بردار میباشد پس از آنجا يك بردار با چهار عامل مشخص میشود

۱- مبدا آن A

۲- امتداد خطی که حامل آنست .

۳- سوی جنبش در روی این امتداد که از مبدا A بسمت B است .

۴- قدر مطلق آن .



خطی که بردار روی آن واقع و از دو طرف نامحدود است حامل بردار نامیده میشود بردار صفر برداری است که انتهای آن بر مبدا آن منطبق باشد . قدر مطلق چنین

بردار صفر بوده امتداد و سوی آن نیز غیر مشخصند . ش ۱

۴- همسنگی - دو بردار را همسنگ گوئیم وقتی موازی ، هم سو ، و قدر مطلقشان یکی باشد و یا بعبارت ساده بتوان با يك انتقال یکی را برد دیگری منطبق نمود . همسنگی را با علامت = نمایش میدهیم $\vec{a} = \vec{a'}$

همسنگی دارای همان خواص تساوی بوده مثلاً چنانكه $\vec{a} = \vec{b}$ باشد $\vec{b} = \vec{a}$ نیز خواهد بود .

چنانكه $\vec{a} = \vec{b}$ و $\vec{b} = \vec{c}$ باشد $\vec{a} = \vec{c}$ خواهد بود .

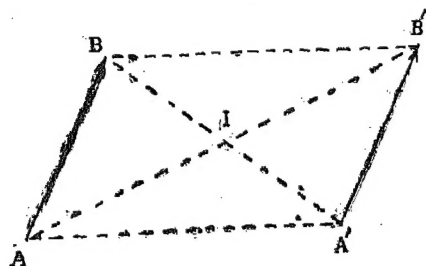
اگر دو بردار \vec{AB} و $\vec{A'B'}$ همسنگ باشند شکل $A B B' A'$ متوازی - الاضلاع بوده و میتوان دو بردار را با انتقالی مساوی $\vec{A A'}$ برهم منطبق نمود و همچنین $\vec{A A'}$ و $\vec{B B'}$ نیز همسنگ میباشند .

چنانكه برداری مساوی صفر باشد آنرا مثل جبر بصورت $\vec{a} = 0$ نمایش میدهیم .

همچنانكه در عملیات جبری روی اعداد میتوان بجای عددی مساوی آنرا

قرار داد بدون آنکه در نتیجه تغییری حاصل شود بهمینطور میتوان در عملیات روی بردارها و اسکالر ها بردارها و اسکالر های مساویشانرا بجای آنها قرار داد و نتیجه حاصل یکی خواهد شد. بطریق دیگر نیز میتوان چنین بیان نمود.

در محاسبات برداری عوامل محاسبه و همچنین نتایج حاصل با تقریب یک



همسنگی یا يك تساوی تعیین میشوند.

۵ - بردار های موازی -

چنانکه دو بردار \vec{a} و \vec{b} موازی باشند میتوان علاوه بر قدر مطلق آنها

سوی آنها را با هم مقایسه نمود.

ش ۲

نسبت دو بردار موازی \vec{a} و \vec{b} مساوی خارج قسمت قدر مطلق های

آنهاست با علامت + یا - بر حسب آنکه دو بردار هم سو یا با سو های مختلف باشند.

خط راستا دار یا محور خطی است که روی آن يك بردار \vec{a} که بجای واحد

بکار میرود انتخاب شده است جهت این بردار جهت محور و تمام بردار های موازی آنرا با آن مقایسه میکنند. بردار \vec{a} را بردار یکه نامند.

اندازه هر بردار نسبت آن به بردار یکه محوری که موازی آنست میباشد.

از آنجا نتیجه میشود که نسبت دو بردار موازی يك محور مساوی خارج قسمت اندازه های آنهاست.

اندازه بردار \vec{AB} یا \vec{a} را با علامت \overline{AB} یا \overline{a} نمایش میدهم در حالیکه قدر

مطلق آن که قدر مطلق اندازه است با علامات $|\vec{AB}|$ یا $|\vec{a}|$ و یا $|\overline{AB}|$ و $|\overline{a}|$

نشان داده میشود.

۶ - حاصل ضرب يك بردار در يك عدد - حاصل ضرب بردار \vec{a} در اسکالر

و یا عدد k مساوی برداریست که دارای همان امتداد \vec{a} و نسبت آن به \vec{a} مساوی k باشد. این بردار با تقریب یک همسنجی تعیین گشته و آنرا با \vec{b} نمایش میدهیم. تمام بردارهای \vec{a} موازی \vec{a} بوده و برعکس هر بردار \vec{b} موازی \vec{a} را میتوان بدین صورت نوشت. زیرا کافی است که k را مساوی نسبت \vec{b} به \vec{a} بگیریم و بخصوص چنانکه محوری با برداریکه \vec{a} فرض کنیم این بستگی را خواهیم داشت و بخصوص بردار موازی محور و با اندازه k $\vec{a} = k$

و بالاخره چنانکه بردار \vec{a} و اعداد k و k' را داشته باشیم بستگی زیر را خواهیم داشت:

$$\vec{a} \cdot (k \cdot \vec{a}) = (k' \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a}$$

برای اثبات آن بردارهای \vec{a} موازی \vec{a} و $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ و $\vec{c} = k' \cdot \vec{a}$ موازی \vec{a} را در نظر میگیریم. بردار \vec{b} را بردار \vec{a} را انتخاب کرده اندازه های \vec{a} و \vec{c} بترتیب $\frac{1}{k}$ و k' بوده و از آنجا نسبت \vec{c} به \vec{a} مساوی خارج قسمت این اندازه هائیعنی: $k \cdot k' = 1$ میباشد. پس از آنجا: $\vec{c} = (k \cdot k') \vec{a}$ میشود از این رابطه نتیجه میشود که خارج قسمت بردار \vec{a} بر عدد k مساوی حاصل ضرب \vec{a} در عکس k خواهد شد. $\vec{b} = \frac{1}{k} \cdot \vec{a}$

جمع هندسی

۷- تعریف - حاصل جمع هندسی چند بردار \vec{a} و \vec{b} و \vec{c} برداریست که بترتیب زیر بدست میآید:

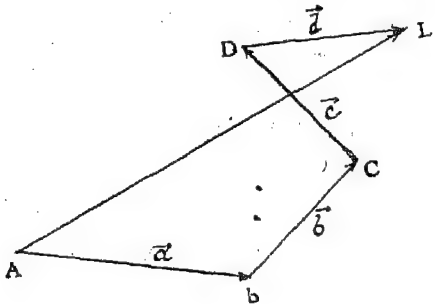
از نقطه A بردار \vec{AB} را همسنج \vec{a} و از نقطه B بردار \vec{BC} را همسنج \vec{b} و از نقطه C بردار \vec{CD} را همسنج \vec{c} و همینطور تا آخرین بردار رسم کرده و چنانکه L انجام آخرین بردار باشد \vec{AL} را حاصل جمع هندسی این بردار ها نامند.

در مورد دو بردار میتوان از همان مبدأ O دو بردار \vec{OA} و \vec{OB} را

همسنگ آنها رسم کرد حاصل جمع \vec{OC} قطر متوازی الاضلاع $OACB$ میباشد.
حاصل جمع هندسی با همان علامت + نمایش داده شده زیرا دارای همان

خواص حاصل جمع اعداد میباشد.

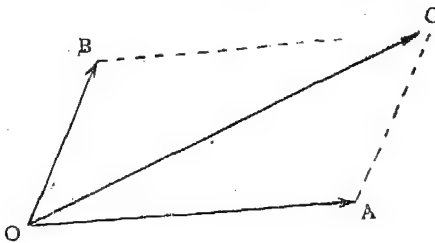
$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad \text{و} \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$



ش ۳

خواص بالا از روی شکل واضح
میباشند زیرا در اولی میتوان در
متوازی الاضلاع جای هر يك از
بردارها را عوض نمود و در دومی
میتوان بعوض دوره كثیر الاضلاع
 BCD بردار \vec{BD} را در* طرف

اول و بردار \vec{AC} را بجای دوره ABC در طرف دوم قرار داد.



ش ۴

از تساوی های فوق نتیجه میشود
که در جمع هندسی يك عده بردار
میتوان جای هر بردار را عوض نموده و
همچنین مجموع چند بردار را میتوان
بجای آنها قرار داد بدون آنکه در نتیجه
تغییری حاصل شود.

قدر مطلق هر حاصل جمع هندسی منتها مساوی مجموع قدر مطلق های

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

این رابطه نیز از روی شکل واضح بوده زیرا طول AI منتها مساوی مجموع

طولهای اضلاع $AB + BC + \dots$ میباشد.

تساوی مجموع قدر مطلقها فقط موقعی است که بردارها موازی و هم سو باشند

۸- بردار متقابل - بردار متقابل \vec{AB} هر بردار همسنگ \vec{BA} است. و این تنها برداری است که با \vec{AB} جمع شده و حاصل صفر میشود.

(۱) $\vec{A}\vec{B} + \vec{B}\vec{A} = 0$ این بردار را میتوان همچنین حاصل ضرب

$\vec{A}\vec{B}$ ، (-۱) دانست و از این جهت آنرا بصورت $\vec{A}\vec{B} - \vec{A}$ یا $\vec{A} - \vec{A}$ نمایش میدهند

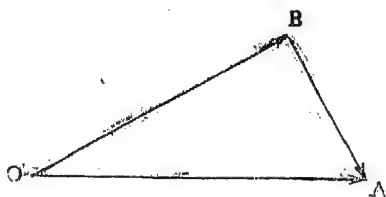
۹- تفاضل هندسی - تفاضل هندسی \vec{b} از \vec{a} برداریست مثل x بطوریکه $\vec{a} = \vec{x} + \vec{b}$ باشد.

این بردار مساوی حاصل جمع \vec{a} و بردار متقابل \vec{b} بوده یعنی:

$\vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b})$ و محض اختصار بصورت $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$ مینویسیم.

چنانکه از نقطه O بردارهای \vec{OA} و \vec{OB} را همسنگ \vec{a} و \vec{b} رسم

کنیم تفاضل $\vec{a} - \vec{b}$ برداری همسنگ \vec{BA} خواهد بود.



ش ۵

از آنجا نتیجه میشود که شرط لازم و

کافی برای آنکه دو بردار همسنگ باشند آنست

که تفاضل آنها برداری مساوی صفر باشد.

در يك تساوی میتوان برداری را از يك

طرف بطرف دیگر برد بشرط آنکه علامت

آنرا تغییر دهند.

۱۰- قضیه شال - چنانکه بردارهایی موازی محوری باشند حاصل جمع آنها

موازی آن محور بوده و بعلاوه بین اندازه های آنها رابطه زیر که بقضیه شال معروف

است برقرار میباشد

اندازه مجموع هندسی بردارهایی موازی يك محور مساوی مجموع جبری

اندازه های هر يك از بردار هاست.

چنانچه بردار ها را طبق آنچه که درمورد حاصل جمع گفته شد در این حال

یکدی را پس از دیگری قرار دهیم رابطه زیر را خواهیم داشت.

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \dots + \overline{KL} = \overline{AL} \quad (۲)$$

در مورد دو بردار همسو یعنی موقعی که B بین A و C باشد قضیه واضح بوده و بستگی $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ را خواهیم داشت.

حالات دیگر دو بردار بحالت فوق برگشته و برای اثبات حالت کلی فرض میکنیم که قضیه برای $n - ۱$ بردار صادق بوده آنرا برای n بردار ثابت میکنیم یعنی رابطه: $\overline{AB} + \overline{BC} + \dots + \overline{HK} = \overline{AK}$ (۳) را ثابت دانسته میخواهیم رابطه: $\overline{AB} + \overline{BC} + \dots + \overline{HK} + \overline{KL} = \overline{AL}$ (۴) را ثابت کنیم برای اینکار بستگی (۳) را از (۴) کم نموده خواهیم داشت:

$$\overline{AL} = \overline{AK} + \overline{KL} \quad \text{یا} \quad \overline{KL} = \overline{AL} - \overline{AK}$$

پس فرمول (۲) کلی بوده و میتوان آنرا بصورت زیر نیز نوشت

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \dots + \overline{KL} + \overline{LA} = ۰ \quad \text{ش ۶}$$

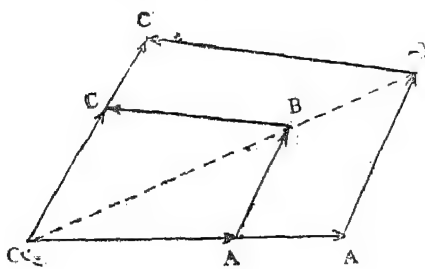
۱۱ - تساویهای هندسی جبری - اگر اعداد x و y و ... بردارهای

\vec{a} و \vec{b} ... را داشته باشیم میتوانیم بستگیهای زیر را بنویسیم:

$$(۵) \quad x(\vec{a} + \vec{b} + \dots) = x\vec{a} + x\vec{b} + \dots$$

$$(۶) \quad (x + y + \dots)\vec{a} = x\vec{a} + y\vec{a} + \dots$$

بستگی (۵) نتیجه میشود از اینکه برای گرفتن متجانس مجموع هندسی:



ش ۷

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} \quad \text{نسبت}$$

x میتوان متجانس هر يك از بردارها را بهمان نسبت گرفت این موضوع از روی شکل و همچنین از خاصیت متجانس واضح میباشد.

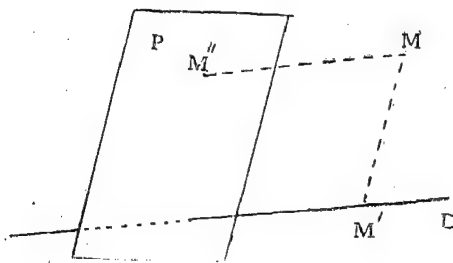
بستگی (۶) از قضیه شال ثابت

شده زیرا بردارهای طرف دوم بستگی موازی بوده و چنانکه $\vec{\alpha}$ را بردار یکی بگیریم اندازه های آنها بترتیب x, y, \dots میباشد.
پس اندازه مجموع آنها $x + y + \dots$ خواهد شد.

تصاویر

۱۲ - تعریف - خط D و صفحه P که موازی نیستند مفروضند. تصویر نقطه M از فضا روی خط D بموازات صفحه P نقطه M' محل برخورد خط مزبور با صفحه موازی P که از M مرور نماید میباشد. و بهمین ترتیب تصویر M روی P محل برخورد صفحه P با خطی موازی D که از M مرور نماید خواهد بود.
تصویر یک بردار بردار است که آغاز و انجام آن تصاویر آغاز و انجام بردار اول باشند.

خواص زیر راجع بتصاویر واضح میباشد.



۱ - تصاویر دو بردار همسنگ روی یک خط یا صفحه و یا روی خطوط و صفحات موازی بردارهای همسنگ اند.

۲ - تصویر مجموع هندسی چند

ش ۸

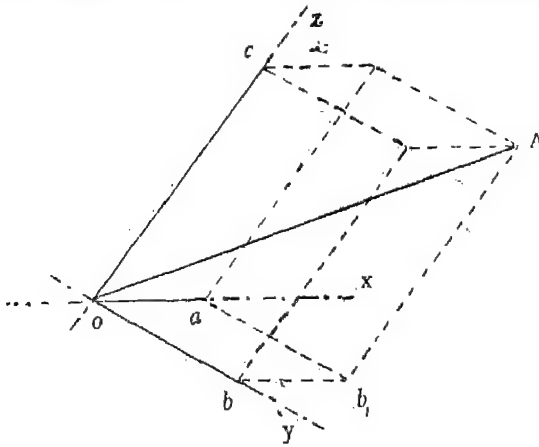
بردار مجموع هندسی تصاویر است.

۳ - هر بردار مجموع هندسی تصاویرش روی سه محور ox و oy و oz که

تشکیل یک سه وجهی را بدهند میباشد. تصویر روی ox بموازات صفحه oyz روی oy بموازات صفحه ozx و روی oz بموازات صفحه oxy خواهد بود. در این حالت تصاویر را مولفه های بردار نامند.

در موردیکه خط و صفحه برهم عمود باشند تصاویر را قائم گویند.

۱۴ - مختصات و یا تصاویر يك بردار - چنانكه از يك نقطه o سه



ش ۹

محور ox و oy و oz

كه روی آنها بردارهای

يكه انتخاب شده باشند مرور

دهیم هر بردار مجموع

هندسی مولفه هایش بوده و

میتوان هر بردار را توسط

این سه مقدار كاملاً مشخص

نمود و محاسبات روی این

اعداد را بعوض محاسبات روی آن بردار انجام داد .

چنانكه \vec{a} برداری با مولفه های x و y و z باشد بستگی زیر را خواهیم

داشت .

$\vec{a} =$ برداری با اندازه x روی ox

$+$ برداری با اندازه y روی oy

برداري با اندازه z روی oz

اعداد x, y, z مختصات بردار \vec{a} نامیده میشوند .

بهر بردار \vec{a} در فضا سه عدد x, y, z مربوط بوده و بالعكس هر دستگاه

سه عددی يك بردار \vec{a} را در فضا با تقریب يك همسنگی مشخص میکنند .

چنانكه \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} بردار های يكه محور های ox, oy, oz باشند بردار

بطول x روی ox را بصورت $x\vec{i}$ و همچنين دو بردار ديگر روی دو محور را بصورت

$y\vec{j}$ و $z\vec{k}$ نمایش داده پس از آنجا خواهیم داشت :

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

چنانكه می بینیم نمایش يك بردار توسط سه عدد بستگی بدستگاه محور ها

داشته در صورتیکه در محاسبات برداری عملیات و روابط نسبت بدستگاه محورها مستقل میباشند.

۱۴ - عملیات در روی تصاویر - دوبردارو تصاویر آنها را روی سه محور

$\vec{0x}$ و $\vec{0y}$ و $\vec{0z}$ بابردهای یک \vec{i} و \vec{j} و \vec{k}

$$\vec{a} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \quad \text{فرض میکنیم:}$$

$$\vec{a}' = X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k}$$

شرایط همسنگ بودن این دو بردار: $X = X'$ $Y = Y'$ $Z = Z'$

و شرایط موازی بودن آنها: $\frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'} = \frac{Z}{Z'}$ میباشند.

مولفه های حاصل ضرب $m\vec{a}$: mX و mY و mZ

و مولفه های مجموع $\vec{a} + \vec{a}'$: $X + X'$ و $Y + Y'$ و $Z + Z'$ خواهند بود.

اثبات - درمورد حاصل جمع کافی است که \vec{a} و \vec{a}' را با هم جمع نموده و

از \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} فاکتور بگیریم:

$$\vec{a} + \vec{a}' = (X + X')\vec{i} + (Y + Y')\vec{j} + (Z + Z')\vec{k}$$

در مورد حاصل ضرب در عدد m بهمین ترتیب از بستگی (۵) استفاده کرده

و چنین خواهیم داشت:

$$m\vec{a} = m(X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) = (mX)\vec{i} + (mY)\vec{j} + (mZ)\vec{k}$$

و بخصوص تصاویر بردار متقابل يك بردار همان تصاویر باعلامت - میباشند

از آنجا تصاویر تفاضل دوبردار: $X - X'$ و $Y - Y'$ و $Z - Z'$

و در نتیجه شرایط همسنگی که عبارت از صفر بودن این تصاویرند بدست میآیند

درمورد موازی بودن دوبردار لازم و کافی است که: $\vec{a} = m\vec{a}'$ بوده و از

آنجا شرایط بالا بدست خواهند آمد.

۱۵ - سوی سه وجهی - در اغلب موارد محورهای مختصات را قائم و واحد

را روی آنها یکی اختیار میکنیم ولی بعضی اوقات لازمست که جهت محورها را نسبت

بهم نیز بررسی نماییم.

گوئیم دو سه وجهی قائم $oxyx$ و $ox'z'$ که یالهای آنها بترتیب معینی قرار گرفته اند دارای يك سو میباشند چنانکه بتوان با يك انتقال يکی را بردیگری منطبق نمود. این انطباق باید طوری باشد که یالهای هم اسم روی هم واقع شوند. از این تعریف قانون زیر نتیجه میشود:

دو سه وجهی دارای يك سو یا سوهای مخالفند بر حسب آنکه بیننده که پی در پی روی دو یال مربوط ox و ox' بایستد بطریقی که جهت این سه ها از پا بسمت سر قرار گیرد وجه های $oxyx$ و $ox'z'$ را در يك سمت یا در سمتهای مخالف هم ببیند و یا بر حسب آنکه در صفحات oxy و $ox'z'$ زوایای مربوطه $(ox$ و $oxy)$ و $(ox'$ و $ox'z')$ دارای يك سو و یا با سوهای مخالف باشند.

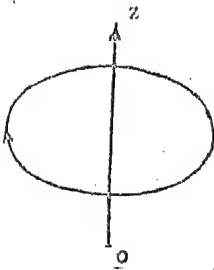
سوی چرخش در حول هر محور مثل IZ را میتوان با سوی سه وجهی مقایسه کرد بدین ترتیب که اگر بیننده در روی این محور طوری بایستد که جهت محور از پا بسمت سر قرار گرفته و نیز چون از داخل سه وجهی زوایای آنرا نگاه کند چنانکه سوی دور آنرا همان سوی زوایای $(ox$ و $oxy)$ و یا $(ox$ و $oxy)$ و یا $(ox$ و $ox)$ ببیند آن دو را همسو و گرنه با سوهای مخالف هم نامند.

وبالاخره میتوان هر سه وجهی را با سه وجهی قائمی مقایسه کرد بدین ترتیب که آنها را همسو یا با سوهای مخالف نامند بر حسب آنکه بیننده که پی در پی زوایای دو سه وجهی غیر مشخص $opqr$ و قائم $oxyx$ را از داخل آنها نگاه کند سوی زوایای $(ox$ و $oxy)$ و $(ox$ و $oxy)$ و $(ox$ و $ox)$ را همان سوی زوایای $(op$ و $opq)$ و $(op$ و $opq)$ و $(op$ و $op)$ و یا مطابق سوی مخالف آنها ببیند.

۱۶ - فضای راستا دار - برای مقایسه دو سه وجهی T و U نسبت بهم میتوان آنها را نسبت بیک سه وجهی سوم I مقایسه کرد. چنانکه T و U همسوی سه وجهی I و یا آنکه هر دو با سوی مخالف I باشند نسبت بهم همسو خواهند بود.

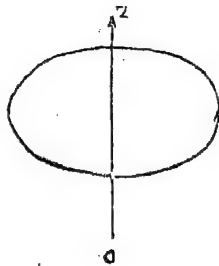
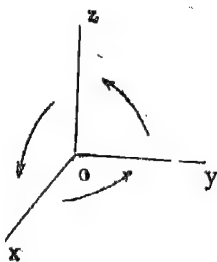
و همچنین است در مورد دوران در حول يك محور .
چنانکه يك سه وجهی I در فضا انتخاب کرده باشند بطوریکه نسبت بآن تمام سه وجهی های دیگر را مقایسه کنند گویند که فضا را راستا دار کرده اند .
در يك فضای راستا دار هر سه وجهی را که همسوی سه وجهی مقایسه I باشد مستقیم یا مثبت و گرنه معکوس یا منفی گویند و همچنین است برای چرخش در حول يك محور .

در اغلب کتابهای هندسه و مکانیک سه وجهی مقایسه را طوری انتخاب میکنند که برای بیننده که روی محور $z = 0$ قرار گیرد محور $x = 0$ در سمت چپ و محور $y = 0$



طرف راست او باشد و یا آنکه دوران در صفحه از چپ بر راست و یا سوی عقربه های ساعت باشد .

در نجوم و فیزیک معمولاً سوی عکس سوی مزبور را انتخاب میکنند یعنی از راست بچپ این سوی دوران زمین نسبت بمحوری که از جنوب بشمال ممتد است میباشد .



ش ۱۰

حاصل ضرب داخلی یا اسکالر دو بردار

۱۲ - تعریف - حاصل ضرب داخلی دو بردار \vec{a} در \vec{b} عددی مساوی حاصل ضرب اندازه های آنها در جیب تمام زاویه دو محوریکه حامل آنها هستند میباشد :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cos (\angle x' x \text{ و } y' y)$$

علامت حاصل ضرب داخلی همان علامت حاصل ضرب معمولی میباشد.
طبق این تعریف مقدار حاصل ضرب داخلی بستگی بسوی مثبتی که روی حامل بردار ها انتخاب کرده ایم ندارد زیرا چنانکه سوی $x'x$ را بجای $x'x'$ مثلا بگیریم اندازه \vec{a} تغییر علامت داده ولی همچنین حیب تمام زاویه هم چون π بر زاویه افزوده شده است تغییر علامت خواهد داد.

میدانیم که حاصل ضرب \vec{a} در \cos زاویه مساوی تصویر \vec{a} روی y' بوده و همچنین است برای \vec{b} پس از آنجا میتوان حاصل ضرب داخلی را یکی از دو صورت $\vec{a} \times \text{تصویر } \vec{b} \text{ روی } x'x$ و یا $\vec{b} \times \text{تصویر } \vec{a} \text{ روی } y'y$ نوشت.

چنانکه سوی $x'x$ و $y'y$ را سوی بردار ها انتخاب کنیم اندازه آنها اعداد مثبتی مساوی قدر مطلقشان شده و در نتیجه زاویه $(y'y'$ و $x'x')$ همان زاویه بردار ها $(\vec{a}$ و $\vec{b})$ بوده و از آنجا میتوان گفت که حاصل ضرب داخلی دو بردار مساوی حاصل ضرب قدر مطلقشان در حیب تمام زاویه بینشان یعنی:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \text{ و } \vec{b}) \quad \text{میباشد}$$

از عبارت فوق نتیجه میشود که حاصل ضرب داخلی دو بردار مثبت، صفر و یا منفی است بر حسب آنکه زاویه بین دو بردار حاده قائمه و یا منفرجه باشد.

۱۸ - خواص حاصل ضرب داخلی - توسط بستگی های زیر که در آنها x و y اعداد \vec{a} و \vec{b} بردار میباشند خلاصه میشوند:

$$(۷) \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$$

$$(۸) \quad (x \cdot \vec{a}) \times (y \cdot \vec{b}) = (xy) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$(۹) \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

همچنین میتوان این بستگی ها را بصورت کلی تر زیر نوشت:

$$(۱۰) \quad (x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + \dots) \times (x' \cdot \vec{a}' + y' \cdot \vec{b}' + \dots) = \\ x x' (\vec{a} \times \vec{a}') + x y' (\vec{a} \times \vec{b}') + y x' (\vec{b} \times \vec{a}') + \dots$$

علامات + و × در این روابط واضح و لازم به توضیح نمیباشند

اثبات - بستگی (۷) طبق تعریف حاصل ضرب روشن میباشد در مورد بستگی

(۸) باید متوجه بود که اندازه $\vec{a} \cdot \vec{x}$ مساوی $\overline{a \cdot x}$ بوده و طبق تعریف حاصل ضرب داخلی

$$(x \cdot \vec{a}) \cdot (y \cdot \vec{b}) = (x \cdot \vec{a}) \cdot (y \cdot \vec{b}) \cdot \cos \alpha = xy (\vec{a} \cdot \vec{b} \cos \alpha)$$

خواهد شد

و بالاخره برای اثبات بستگی (۹) میدانیم که طرف اول معادله حاصل ضرب

اندازه \vec{a} روی \vec{x} در تصویر $\vec{c} + \vec{b}$ روی همین محور میباشد ولی این تصویر

مساوی مجموع تصاویر و اندازه آن مساوی مجموع اندازه های آنها است پس :

$$\overline{c \cdot \text{تصویر } a} + \overline{b \cdot \text{تصویر } a} = \overline{(c + b) \cdot \text{تصویر } a} = \overline{a \cdot (b + c)}$$

۱۹ - حالات مخصوص - خواص زیر طبق تعریف واضح بوده و در موارد

بسیاری بکار میروند.

شرط لازم و کافی برای آنکه حاصل ضرب داخلی دو بردار صفر باشد آنستکه

یکی از بردارها صفر بوده و یا آنکه دو بردار برهم عمود باشند.

حاصل ضرب داخلی يك بردار در خودش مساوی مجذور قدر مطلقش و یا

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = (\overline{a})^2$$

مساوی مجذور اندازه اش میباشد.

۲۰ - حاصل ضرب داخلی بر حسب تصاویر - سه محور قائم $0x$ و $0y$ و $0z$

و بردارهای \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} با طولهای مساوی روی آنها گرفته نتایج زیر را برای

حاصل ضربهای این بردارها خواهیم داشت.

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

در نتیجه چنانکه دو بردار \vec{a} و $\vec{a'}$ با تصاویر (X, Y, Z) و (X', Y', Z')

فرض کنیم و چنانکه آنها را طبق دستور (۱۰) درهم ضرب نماییم چنین خواهیم داشت

$$\vec{a} \cdot \vec{a'} = (X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) \cdot (X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k}) = X \cdot X' + Y \cdot Y' + Z \cdot Z'$$

و بخصوص مجذور يك بردار مساوی مجموع مجذورات مولفه هایش میباشد

$$(\vec{a})^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

همچنین میتوان گفت که اندازه تصویر قائم يك بردار \vec{a} روی محوری مساوی حاصل ضرب داخلی این بردار در بردار يکه محور میباشد.

و بخصوص تصاویر X و Y و Z بردار \vec{a} روی محورهای مختصات بترتیب مساوی $\vec{a} \cdot \vec{i}$ و $\vec{a} \cdot \vec{j}$ و $\vec{a} \cdot \vec{k}$ خواهند شد.

۲۱- موارد استعمال - در مثلث ABC که اضلاع آنرا بترتیب a و b و c میگیریم بستگی برداری $\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA}$ را میتوان نوشت.

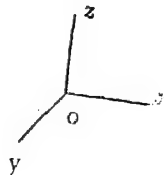
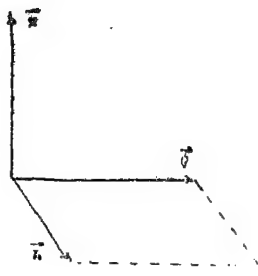
و چنانکه آنرا مجذور کنیم: $(\vec{AB})^2 = (\vec{CB})^2 + (\vec{CA})^2 - 2 \vec{CB} \cdot \vec{CA}$
مقادیر $(\vec{AB})^2$ و $(\vec{CB})^2$ و $(\vec{CA})^2$ بترتیب مساوی a^2 و b^2 و c^2 بوده و برای محاسبه $\vec{CB} \cdot \vec{CA}$ سوی مثبت را سوی همین بردارها انتخاب کرده و در نتیجه اندازه آنها a و b خواهند شد. پس از آنجا بستگی مثلثاتی زیر را خواهیم داشت

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

همچنین میتوان دستورهای مثلثات مسطحه و کروی را از راه حاصل ضرب داخلی بدست آورد.

حاصل ضرب خارجی یا برداری

۲۲- تعریف - چنانکه دو بردار \vec{a} و \vec{b} در فضای راستا داری داده شده باشند حاصل ضرب خارجی یا برداری آنها بردار \vec{n} است که با سه شرط زیر تعیین شود



۱- امتداد آن عمود بصفحه

بردارهای \vec{a} و \vec{b} است.

۲- سوی آن طوری است

که سه وجهی $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{n})$

مستقیم یعنی هم سوی سه وجهی

مقایسه باشد.

۳- قدر مطلق آن مساوی سطح متوازی الاضلاعی است که از دو بردار فوق

تشکیل شود.

چنانکه دو بردار موازی باشند بنا بر تعریف حاصل ضرب آنها صفر است.
میدانیم که اندازه سطح متوازی الاضلاع مساوی حاصل ضرب قدر مطلقهای \vec{a} و \vec{b} است در قدر مطلق حیب زاویه بینشان.

حاصل ضرب خارجی را با علامت $\vec{a} \wedge \vec{b}$ نمایش میدهیم.

۲۲- خواص حاصل ضرب خارجی - خواص حاصل ضرب برداری با

فرمولهای زیر خلاصه میشوند:

$$(۱۱) \quad \vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$$

$$(۱۲) \quad (x \cdot \vec{a}) \wedge (y \cdot \vec{b}) = xy (\vec{a} \wedge \vec{b})$$

$$(۱۳) \quad \vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$$

و یا بطور کلی:

$$(۱۴) \quad (x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + \dots) \wedge (x' \cdot \vec{a}' + y' \cdot \vec{b}' + \dots) = \\ xx' (\vec{a} \wedge \vec{a}') + xy' (\vec{a} \wedge \vec{b}') + \\ yx' (\vec{b} \wedge \vec{a}') + \dots yy' (\vec{b} \wedge \vec{b}') + \dots$$

در يك چنین حاصل ضرب باید مكان هر عامل را حفظ کرد.

و بالاخره برای آنکه حاصل ضرب خارجی دو بردار صفر باشد لازم و کافی

است که یکی از عوامل صفر و یا آنکه دو بردار موازی باشند.

چنانکه: $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$ باشد

خواه $\vec{a} = 0$ و یا $\vec{b} = 0$ و یا $\vec{a} = n \cdot \vec{b}$ است

۲۴- اثبات - در بستگی (۱۱) امتداد بردار حاصل ضرب و همچنین قدر

مطلق آن در دو طرف با هم مساوی ولی سوی بردارها باهم مخالفند.

بستگی (۱۲) از حیث قدر مطلق واضح بوده زیرا چنانکه اضلاع يك متوازی

الاضلاع را بترتیب در x و y ضرب نمائیم قدر مطلق سطح آن در xy ضرب میشود

امتداد حاصل ضرب هم نیز تغییر نمی‌کند و فقط سوی آنرا باید بررسی نمود و چون در حالات مختلف این بررسی را بنمائیم خواهیم دید که دو بردار همسو می‌باشند.

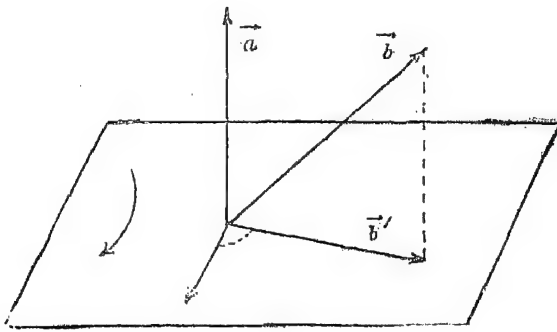
برای اثبات بستگی (۱۳) از قضیه زیر استفاده می‌کنیم:

قضیه - حاصل ضرب خارجی بردار \vec{a} در بردار \vec{b} مساوی حاصل ضرب خارجی \vec{a} در تصویر قائم \vec{b} روی صفحه عمود به \vec{a} می‌باشد.

\vec{b}' را تصویر \vec{b} روی صفحه (A) عمود به \vec{a} فرض کرده بستگی:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b}' \quad \text{را ثابت می‌کنیم.}$$

صفحه دو بردار \vec{a} و \vec{b} عمود به (A) بوده و شامل \vec{b}' می‌باشد. در نتیجه



ش ۱۲

دو حاصل ضرب $\vec{a} \wedge \vec{b}$

و $\vec{a} \wedge \vec{b}'$ دارای یک

امتداد مشترك و يك قدر

مطلق می‌باشند. و همچنین

سوی آنها یکی می‌باشد زیرا

بیننده که روی یکی از آنها

قرار گیرد زوایای:

$$(\vec{a} \text{ و } \vec{b}) \text{ و } (\vec{a} \text{ و } \vec{b}')$$

همسو می‌بینند. از طرفی میتوان

حاصل ضرب $\vec{a} \wedge \vec{b}$ را با این طریق

بدست آورد:

در صفحه (A) بردار \vec{b}' را

با اندازه يك قائمه در جهت مثبت

دوران داده و بعد اندازه آنرا در

$$|\vec{a}| \text{ ضرب نمائیم.}$$

ش ۱۳

حال برای اثبات بستگی (۱۳) \vec{c} و \vec{a} را روی صفحه عمود به \vec{a} تصویر نموده
تصویر حاصل جمع $\vec{c} + \vec{c}'$ بردار $\vec{c} + \vec{c}'$ خواهد شد. و بر حسب آنچه گفتیم
خواهیم داشت $\vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c}'$ $\vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c}'$
 $\vec{a} \wedge (\vec{c} + \vec{c}') = \vec{a} \wedge (\vec{c} + \vec{c}')$

حال برای بدست آوردن حاصل ضربهای طرف دوم کافی است که \vec{c} و \vec{c}'
و $\vec{c} + \vec{c}'$ را بیک زاویه قائمه دوران داده و بعد آنها را ضرب در قدر مطلق \vec{a}
بنمائیم ولی قبل از دوران $(\vec{c} + \vec{c}')$ قطر متوازی الاضلاع بوده و پس از دوران
و ضرب نمودن آن در مقدار معینی باز هم قطر متوازی الاضلاع دیگری که اضلاع
آن بترتیب $(\vec{a} \wedge \vec{c})$ و $(\vec{a} \wedge \vec{c}')$ هستند خواهد شد و چون پس از این عمل
مساوی با $\vec{a} \wedge (\vec{c} + \vec{c}')$ میشود از آنجا :

$$\vec{a} \wedge (\vec{c} + \vec{c}') = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{a} \wedge \vec{c}'$$

و در نتیجه بستگی (۱۳) ثابت میگردد.

۲۵- تصاویر حاصل ضرب برداری - چنانکه سه وجهی قائم xyz و
دارای یک \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} را روی محورهای آن بگیریم بستگی های :

$$\begin{aligned} \vec{i} \wedge \vec{i} &= 0 & \vec{j} \wedge \vec{k} &= \vec{i} \\ \vec{j} \wedge \vec{j} &= 0 & \vec{k} \wedge \vec{i} &= \vec{j} \\ \vec{k} \wedge \vec{k} &= 0 & \vec{i} \wedge \vec{j} &= \vec{k} \end{aligned}$$

بین بردارهای یک برقرار میباشند.

چنانکه تصاویر \vec{a} و \vec{a}' را $Z'Y'X'$ و $Z'Y'X$ فرض کنیم پس از
استفاده از فرمول (۱۴) خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{a}' &= (X' \cdot \vec{i} + Y' \cdot \vec{j} + Z' \cdot \vec{k}) \wedge (X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k}) \\ &= (Y'Z' - Z'Y') \cdot \vec{i} + (Z'X' - X'Z') \cdot \vec{j} + (X'Y' - Y'X') \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

براستزهای طرف دوم بستگی تصاویر حاصل ضرب روی محورها بوده و چنانکه

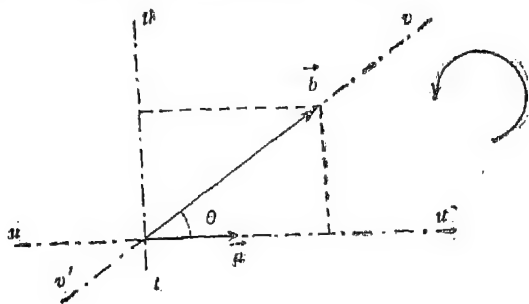
دیده میشود خواص حاصل ضرب خارجی از روی تصاویر آن نیز واضح میباشد.

۲۶ - بردار در صفحه راستا دار - صفحه راستا دار صفحه است که در آن سوی دوران زوایا معین شده باشد. يك چنین صفحه فضا را بدو ناحیه مثبت و منفی تقسیم میکند ناحیه مثبت ناحیه ایست که در آن جهت چرخش صفحه مثبت و ناحیه دیگر منفی میباشد.

بردار یکه \vec{r} را که عمود بر صفحه است عمود مستقیم بر صفحه نامند چنانکه امتداد آن در ناحیه مثبت صفحه باشد.

دو محور I_x و I_y واقع در صفحه را عمود مستقیم بهم گویند چنانچه زاویه $(I_x \text{ و } I_y)$ مساوی $\frac{\pi}{2}$ باشد.

چنانکه \vec{e}_1 و \vec{e}_2 بردارهای یکه این محورها باشند سه وجهی $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ قائم و مستقیم بوده و روابط: $\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$ و $\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1$ را بین آنها خواهیم داشت چنانکه دو بردار \vec{a} و \vec{b} را در این صفحه فرض کنیم حاصل ضرب خارجی آنها عمود به صفحه در امتداد \vec{r} بوده و اندازه آن روی محور o_z با بردار یکه \vec{r} بر حسب تصاویر Y, X' و Y', X آن دو بردار نسبت بدو محور o_x و o_y واقع در صفحه چنین خواهد شد



و چون زاویه بین دو بردار را θ فرض کنیم چنین خواهیم داشت:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \text{ اندازه} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \sin \theta.$$

ش ۱۴

چنانکه صفحه راستا

دار نباشد فقط قدر مطلق حاصل ضرب را میتوان داشت.

۲۷ - بستگی لاگرانژ - برای پیدا کردن این بستگی از راه برداری مجذور

حاصل ضرب خارجی دو بردار را حساب میکنیم :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 \cdot \sin^2 \theta = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos \theta)^2$$

ولی داخل پراکنش طرف دوم معادله حاصل ضرب داخلی \vec{a} و \vec{b} پیش نیست .
 بطوریکه معادله بصورت $(\vec{a} \wedge \vec{b})^2 = (\vec{a})^2 \cdot (\vec{b})^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ نوشته
 میشود . چنانکه تصاویر بردار ها را بترتیب $(X$ و Y و $Z)$ و $(X'$ و Y' و $Z')$

بگیریم معادله بصورت زیر که به بستگی لاگرانژ موسوم است در میآید .

$$(Y'Z' - Z'Y')^2 + (ZX' - X'Z')^2 + (XY' - Y'X')^2$$

$$= (X^2 + Y^2 + Z^2)(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) - (XX' + YY' + ZZ')^2$$

۴۸ - حاصل ضرب مختلط - حاصلضرب مختلط سه بردار \vec{a} و \vec{b} و \vec{c} مقدار

$(\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot \vec{a}$ میباشد . این حاصل ضرب يك اسکالر بوده و مقدار آن بر حسب

تصاویر بردارها که بترتیب برای \vec{a} و \vec{b} و \vec{c} مقادیر $(X$ و Y و $Z)$ و $(X'$ و Y' و $Z')$

و $(X''$ و Y'' و $Z'')$ بگیریم چنین میشود :

$$Y'Z'' - Z'Y''$$

$$Z'X'' - X'Z''$$

$$X'Y'' - Y'X''$$

$$\vec{b} \wedge \vec{c} \text{ تصاویر}$$

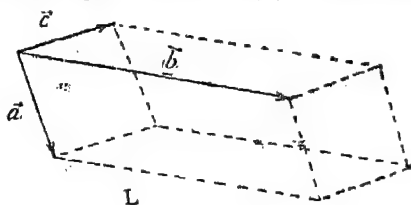
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = X \cdot (Y'Z'' - Z'Y'') :$$

$$+ Y(Z'X'' - X'Z'') + Z(X'Y'' - Y'X'')$$

چنانکه می بینیم طرف دوم بستگی بسط دترمینان
 $\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{vmatrix}$ میباشد .

از طرفی حاصل ضرب مختلط نمایش حجم متوازی السطوحی که روی سه

بردار ساخته شده باشد نیز میدهد زیرا قدر مطلق $\vec{b} \wedge \vec{c}$ مساوی سطح متوازی -



الاضاعی که روی دو بردار ساخته

میشود بوده و در نتیجه حاصل

ضرب مختلط نمایش حاصل ضرب

این سطح در تصویر \vec{a} روی $\vec{b} \wedge \vec{c}$

یعنی تصویر a روی عمود بصفحه h و \vec{e} را میدهد. علامت این حجم $+$ یا $-$ است بر حسب آنکه این سه بردار تشکیل يك سه وجهی مستقیم یا معکوس را بدهند.

همگنی

۲۹ - در این قسمت بحث از اندازه چندیمای هندسی (خط - سطح - حجم) که با آنها سروکار داریم و بین آنها روابطی مینویسیم مینمائیم. البته انتخاب يك واحد طول که از آن تمام واحد های دیگر نتیجه میشوند لازم خواهد بود. این واحد در محاسبات عددی متر - سانتیمتر و یا واحد دیگر و در موضوعات نظری انتخاب آن لازم نبوده و در همین مورد است که اصل همگنی دخالت مینماید.

میدانیم چنانکه يك چندی را متوالیاً با دو واحد مختلف U و U' اندازه بگیریم چنانکه نسبت $k = \frac{U}{U'}$ باشد اندازه های مربوطه m و m' آن چندی به نسبت عکس $\frac{1}{k} = \frac{m}{m'}$ خواهد بود.

حال فرض کنیم که بین اندازه های طولهای مختلف يك شکل رابطه که بستگی بانتخاب واحد نداشته باشد نوشته باشیم.

طبق قضیه بالا این اندازه ها با تقریب يك ضرب معلوم بوده زیرا چنانکه واحد را تغییر دهیم تمام اندازه ها در يك عدد ضرب میشوند از آنجا نتیجه میشود که چنانکه بستگی $f(a, b, c, \dots) = 0$ بین این اندازه ها برقرار باشد این بستگی چنانکه a, b, c, \dots را در ضربی ضرب کنیم تغییری نخواهد کرد چنین بستگی را همگن نامیم.

چنانکه موقعی تمام مفروضات از يك نوع نباشند انتخاب يك واحد طول اجباری بوده ولی چنانچه محاسبه را با مفروضات همگن شروع نموده و در حین عمل بيك معادله غیر همگن بر بخوریم مطمئناً اشتباهی رخ داده است.

باید یاد آور شد که جهت بر آورد درجه همگنی يك سطح از درجه ۲، يك

حجم از درجه ۳ و خطوط مثلثاتی و زاویه قوس از درجه صفر میباشند.
در مورد مفروضات غیر همگن همیشه ممکن است رابطه را همگن نمود
مثلا معادله (۱۵) را غیر همگن فرض نموده چنانکه واحد را تغییر دهیم و α را
اندازه واحد قبلی نسبت بواحد جدید بگیریم اندازه های α', δ', \dots بصورت:
 $\alpha' = \alpha$ و $\delta' = \delta \dots$ در آمده در نتیجه رابطه (۱۵) بصورت:
$$0 = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}, \frac{\delta'}{\delta}, \dots, \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right) \quad (16)$$

که نسبت به $\alpha', \delta', \dots, \epsilon'$ همگن
است در میآید.

۳. مشتق هندسی

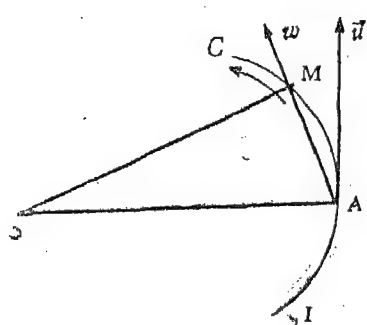
۳۰ - مشتق يك بردار - گویند بردار \vec{a} که بمتغیر t بستگی دارد در
فاصله (t_0, t_1) مشخص میباشد چنانکه بازاء هر مقدار t این فاصله يك بردار \vec{a} از
حیث امتداد، سو و قدر مطلق معلوم باشد. قضایای مربوط بحد و پیوستگی چنین
بردار ها نظیر قضایای مربوطه توابع معمولی بوده و البته تصاویر چنین بردار هم
توابعی از t میباشند.

چنانکه از نقطه o فضا بردار هایی همسنگ هریک از بردار های (t) \vec{a} مرور
دهیم با تغییر t انتهای M آنها منحنی در فضا موسوم به هودوگراف یا اندیکاتریس
رسم مینماید. این منحنی نمایش تغییرات تابع برداری را داده و برعکس میتوان هر
منحنی را نمایش دهنده تغییرات يك تابع برداری دانست.

بردار $\vec{a}(t)$ و t_0 یکی از مقادیر t را فرض نموده حد نسبت:
$$\frac{\vec{a}(t) - \vec{a}(t_0)}{t - t_0}$$

و قتیکه t بسمت t_0 میل کند (اگر این حد وجود داشته باشد)
مشتق بردار $\vec{a}(t)$ بازاء $t = t_0$ نامند.

اگر برداری ثابت باشد مشتق آن صفر و برعکس اگر مشتق هندسی يك بردار
همیشه صفر باشد آن بردار ثابت است.



چنانکه می بینیم تعریف فوق شبیه به تعریف مشتق توابع اسکالر بوده و همان علامت را برای نمایش دادن آن بکار میبریم:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} \text{ یا } \vec{a}'_t(t_0)$$

A را نقطه مربوط بمقدار t_0 متغیر روی

ش ۱۶

هودوگراف گرفته و در روی این منحنی مبداء

مثلا I و سویی جهت جنبش روی آن انتخاب میکنیم بطوریکه بازاء هر نقطه منحنی يك عدد که اندازه قوس \widehat{AM} است باعلامت آن داشته باشیم. البته $s = \widehat{AM}$ بستگی

بمقدار t داشته و رابطه فوق را میتوان چنین نوشت:

$$\frac{\vec{a}(t) - \vec{a}(t_0)}{t - t_0} = \frac{\vec{AM}}{t - t_0}$$

امتداد بردار فوق وتر AM بوده و چنانکه روی آن بردار يکه w را در

جهت قوسهای صعودی هودوگراف بگیریم نسبت فوق بصورت:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{a}(t) - \vec{a}(t_0)}{t - t_0} &= \frac{\vec{AM}}{w} \cdot \frac{1}{t - t_0} \\ &= \frac{\vec{AM}}{w} \cdot \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \end{aligned}$$

نوشته میشود. سوی w از A بسمت M یا برعکس آنست بر حسب آنکه $s(t)$ بزرگتر یا کوچکتر از $s(t_0)$ باشد.

چنانکه t سمت t_0 میل کند M بسمت A میل کرده و چون صورت و مخارج

نسبت: $\frac{\vec{AM}}{s(t) - s(t_0)}$ هم علامت اند پس حد آن که حد نسبت وتر بقوس

است يك خواهد شد. از طرفی حد بردار w بردار e بطول يك مماس بر منحنی و

سوی آن سوی قوسهای صعودی بوده و حد نسبت $\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ مشتق s نسبت

به r خواهد شد پس مشتق هندسی را میتوان چنین نوشت: $\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{u} \cdot \frac{ds}{dt}$

یعنی مشتق هندسی بردار است که امتداد آن مماس بر هودوگراف و سوی آن سوی قوسهای صعودی و اندازه آن $\frac{ds}{dt}$ است.

۳۱- محاسبه مشتق هندسی - مشتق هندسی که باین ترتیب تعریف میکنیم نظیر مشتق توابع جبری بازاء يك مقدار r متغیر معین بوده ولی چنانکه این مشتق را بازاء مقادیر مختلف r حساب کنیم میتوان آنرا بنوبه خود تابعی از r دانسته و نسبت باین توابع میتوان مشتقی که مشتق دوم بردار اول نامیده میشود تعریف کرد. قوانین محاسبه مشتق هندسی همان قوانین توابع معمولی بوده و آنها را بوسیله دستورهای زیر که بجای مشتق علامت دیفرانسیل بکار برده ایم خلاصه کرده ایم:

$$d(\vec{a} + \vec{b}) = d\vec{a} + d\vec{b}$$

$$d(f \cdot \vec{a}) = f \cdot d\vec{a} + d f \cdot \vec{a}$$

$$d(\vec{a} \cdot \vec{b}) = d\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot d\vec{b}$$

$$d(\vec{a} \wedge \vec{b}) = d\vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge d\vec{b}$$

اثبات آنها شبیه باثبات دیفرانسیل های توابع معمولی بوده و در مورد حاصل ضرب خارجی باید مرتبه هر عامل را در مشتق حفظ کرد.

۳۲- تصاویر مشتق هندسی - چنانکه $\alpha(t)$ را اندازه تصویر بردار $\vec{a}(t)$ روی محوری با بردار \vec{v} فرض کنیم خواهیم داشت: $\alpha(t) = \vec{v} \cdot \vec{a}(t)$ چنانکه مشتقات متوالی از این رابطه بگیریم:

$$\alpha'_t = \vec{v} \cdot \vec{a}'_t$$

و ... و $\alpha''_t = \vec{v} \cdot \vec{a}''_t$ خواهند شد و از آنجا نتیجه میشود که: مشتقات

متوالی تصویر يك بردار روی يك محور تصاویر مشتقات هندسی آن بردارند. از قضیه فوق نتیجه میشود که چنانچه تصاویر بردار \vec{a} را روی سه محور

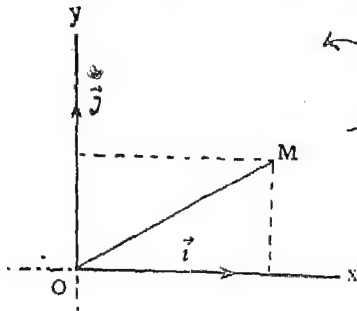
با بردارهای یکه $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ بترتیب X, Y, Z بگیریم و همانطور که سابق گفتیم \vec{a} را بصورت: $\vec{a} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k}$ بنویسیم میتوانیم مشتق اول آنرا بصورت: $\vec{a}' = X' \cdot \vec{i} + Y' \cdot \vec{j} + Z' \cdot \vec{k}$ نیز بنویسیم و همچنین است برای مشتقات متوالی آن بردار.

بخش دوم

مختصات

۴۴- مختصات قائم - در صفحه راستا دار دو محور قائم Ox, Oy را که با هم گوشه $+\frac{\pi}{2}$ داشته باشند فرض میکنیم \vec{i} و \vec{j} را بردارهای یکه روی آنها گرفته میدانیم که مختصات نقطه $M(x, y)$ تصاویر بردار \vec{OM} بوده و بستگی: $\vec{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$ بین آنها برقرار میباشد.

همچنین میتوان x, y را حاصل ضرب داخلی \vec{OM} در \vec{i} و \vec{j} گرفت:



$$x = \vec{OM} \cdot \vec{i} \quad \text{و} \quad y = \vec{OM} \cdot \vec{j}$$

را طول و y را عرض و هر دو را مختصات

کارترین نقطه M نامند.

اگر بردار \vec{AB} توسط بردارهای \vec{OA}

و \vec{OB} و یا آنکه توسط مختصات آغاز و انجامش

یعنی $A(\alpha, \beta)$ و $B(\alpha', \beta')$ معلوم باشد

بستگی های زیر را خواهیم داشت:

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (\alpha' - \alpha) \vec{i} + (\beta' - \beta) \vec{j}$$

و از آنجا تصاویر \vec{AB} بترتیب $(\alpha' - \alpha)$ و $(\beta' - \beta)$ خواهند بود

دو نقطه M و M' که دارای يك مختصات $x = x'$ و $y = y'$ باشند برهم

منطبق بوده ولی برعکس دو بردار که دارای يك تصاویر باشند فقط همسنگ خواهند

بود یعنی نقطه عملشان در صفحه غیر مشخص میباشد.

۴۴ - مختصات قائم در فضا - سه محور که با هم تشکیل يك سه وجهی

قائم را بدهند فرض کرده سوی آنرا سوی مستقیم میگیریم. سه بردار يک:

\vec{i} و \vec{j} و \vec{k} با طولهای مساوی روی آنها گرفته مختصات نقطه M تصاویر (x, y, z)

بردار \vec{OM} خواهند بود بطوریکه بستگی:

$\vec{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ بین آنها برقرار باشد.

همچنین میتوان نوشت: $x = \vec{OM} \cdot \vec{i}$ $y = \vec{OM} \cdot \vec{j}$ $z = \vec{OM} \cdot \vec{k}$

اگر بردار \vec{AB} توسط مختصات آغازش (a, b, c) و مختصات انجامش

(a', b', c') معین باشد بستگی $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ برقرار بوده و از آنجا:

تصاویر \vec{AB} بترتیب $(a' - a)$ و $(b' - b)$ و $(c' - c)$ خواهند بود.

۴۵ - فاصله دو نقطه در صفحه - بردار \vec{a} و تصاویر قائم آن X و Y را

فرض کرده میدانیم که مجذور طول آن مساوی حاصل ضرب داخلی آن در خودش

میشود: $r^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{a})^2 = X^2 + Y^2$

از آنجا نتیجه میشود که چنانچه بردار \vec{AB} توسط مختصات آغازش $A(a, b)$

و انجامش $B(a', b')$ معلوم باشد مجذور فاصله دو نقطه A و B

$\vec{AB}^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = (a' - a)^2 + (b' - b)^2$ خواهد شد.

۴۶ - فاصله دو نقطه در فضا - بهمین ترتیب دیده میشود که مجذور طول

يك بردار در فضا: $r^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = X^2 + Y^2 + Z^2$

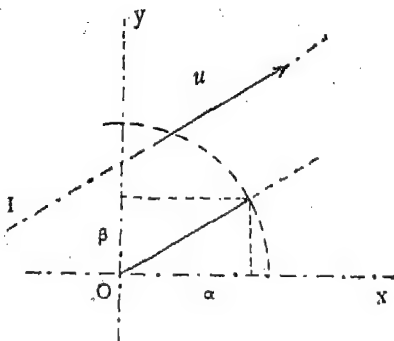
و فاصله دو نقطه A و B :

$\vec{AB}^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = (a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (c' - c)^2$ خواهد شد

۴۷ - تعیین يك نیم خط یا خط راستا دار - برای تعیین امتداد يك نیم خط

یا خط راستا دار $I \neq$ معمولاً تصاویر (α, β) يك بردار يک $\vec{\alpha}$ واقع روی آن را تعیین

مینمایند. این تصاویر را کوسینوس های هادی یا پارامتر های هادی اصلی مینامند.



ش ۱۸

خواص زیر جهت این تصاویر روشن می باشند.

۱- شرط لازم و کافی برای

آنکه دو عدد (α, β) کوسینوس های هادی باشند آنستکه:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \text{ باشد.}$$

۲- چنانکه θ زاویه بین:

Ox و Iz باشد $\theta = (Ox, Iz)$ مقادیر α و β بر حسب θ بصورت:

$$\alpha = \cos \theta, \quad \beta = \sin \theta.$$

و یا: $\alpha = \cos(Ox, Iz)$ $\beta = \cos(Oy, Iz)$ بیان می شوند.

نام کوسینوس هادی بمناسبت روابط اخیر بوده و همچنین باید یاد آور شد که کوسینوس های هادی نسبت دو طول بوده و از آنجا بدون بعد می باشند.

۳۸- تعیین یک نیم خط یا خط راستا دار در فضا - بهمین ترتیب در فضا

جهت تعیین امتداد یک نیم خط یا خط راستا دار تصاویر α, β, γ یک بردار یکجهته \vec{u} واقع روی آنرا میدهند. این مقادیر را کوسینوس های هادی و یا پارامترهای هادی اصلی نامیده و در بستگی: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ و یا $\vec{u} \cdot \vec{u} = 1$ صدق میکنند. شرط بالا شرط لازم و کافی برای آنکه سه عدد (α, β, γ) کوسینوسهای

هادی باشند بوده و همچنین خواهیم داشت:

$$\alpha = \vec{u} \cdot \vec{i}, \quad \beta = \vec{u} \cdot \vec{j}, \quad \gamma = \vec{u} \cdot \vec{k}$$

و یا: $\alpha = \cos(Ox, Iz)$ $\beta = \cos(Oy, Iz)$ $\gamma = \cos(Oz, Iz)$

۳۹- گوشه دو خط راستا دار در صفحه - V را گوشه بین دو خط

راستا دار Iz و $I'z'$ با بردارهای یکجهته \vec{u} و $\vec{u'}$ و کوسینوسهای هادی (α, β) و (α', β') فرض میکنیم. چون صفحه راستا دار فرض شده است V با تقریب $\pi/2$

نماین گشته و در نتیجه خطوط مثلثاتی آن کاملاً مشخص میباشند:

$$\cos V = \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}'}{|\vec{u}| |\vec{u}'|} \quad \text{و یا} \quad \cos V = \alpha \alpha' + \beta \beta'$$

$$\sin V = \frac{|\vec{u} \wedge \vec{u}'|}{|\vec{u}| |\vec{u}'|} \quad \text{و یا} \quad \sin V = \alpha \beta' - \beta \alpha'$$

$$\lg V = \frac{\alpha \beta' - \beta \alpha'}{\alpha \alpha' + \beta \beta'}$$

شرایط عمود بودن و موازی بودن از این دستورها نتیجه میشوند:

$$\alpha \beta' - \beta \alpha' = 0 \quad \text{و یا} \quad \vec{u} \wedge \vec{u}' = 0 \quad \text{شرط موازی بودن:}$$

$$\alpha \alpha' + \beta \beta' = 0 \quad \text{و یا} \quad \vec{u} \cdot \vec{u}' = 0 \quad \text{شرط عمود بودن:}$$

شرط بالا برای موازی بودن همان شرط تناسب α و β و α' و β' بوده و نسبت آنها ۱+ یا ۱- است بر حسب آنکه دو بردار یک همسویا با سوهای مخالف باشند

چنانکه I یا I' با کوسینوسهای هادی (α, β) داده شده باشد و بخواهیم α_1 و β_1 کوسینوسهای هادی I عمود مستقیم با آنرا حساب کنیم از دستورهای زیر استفاده

$$\cos V = 0 \quad \alpha \alpha_1 + \beta \beta_1 = 0 \quad \text{میکنیم:}$$

$$\sin V = 1 \quad \alpha \beta_1 - \beta \alpha_1 = 1$$

و از آنجا مقادیر α_1 و β_1 و α و β بدست میآیند

۴۰ - گوشه دو خط راستا دار در فضا - در اینجا هم V را گوشه دو

خط راستا دار I و I' با بردارهای \vec{u} و \vec{u}' و کوسینوسهای هادی

(α, β, γ) و $(\alpha', \beta', \gamma')$ فرض میکنیم. در اینحالت V فقط با تقریب علامت

$$(I, I') = \pm V + 2k\pi \quad \text{معلوم بوده:}$$

و از آنجا حیب تمام آن فقط مشخص میباشند:

$$\cos V = \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}'}{|\vec{u}| |\vec{u}'|} \quad \cos V = \alpha \alpha' + \beta \beta' + \gamma \gamma'$$

شرط موازی بودن دو امتداد چنانکه دیدیم: $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'} = \pm 1$

و شرط عمود بودن $\cos V = 0$ میباشند $\alpha \alpha' + \beta \beta' + \gamma \gamma' = 0$

در مورد موازی بودن نسبت تصاویر مساوی α یا β است بر حسب آنکه دو نیم خط همسو یا با سوهای مخالف باشند.

مسئله - $I\alpha'$ و $I\beta'$ را دو نیم خط عمود بهم گرفته میخوانیم کوسینوسهای هادی نیم خط $I\alpha''$ عمود مستقیم بآن دو را پیدا نماییم.

چنانکه $\vec{\alpha''}$ بردار یک با تصاویر α'' ، β'' ، γ'' واقع روی $I\alpha'$ باشد خواهیم داشت:

$$\vec{\alpha''} = \vec{\alpha} \wedge \vec{\alpha'}$$

و از آنجا: $\alpha'' = \beta\gamma' - \gamma\beta'$ $\beta'' = \gamma\alpha' - \alpha\gamma'$ $\gamma'' = \alpha\beta' - \beta\alpha'$

خواهند بود.

۴۱ - خط بدون راستا - زاویه $0x$ با چنین خطی 0 یا $0 + \pi$ بوده بین خطوط

مثلاثی فقط ظل آن که ضریب زاویه خط معروف است مشخص بوده و از آنجا نتایج زیر را میتوان برای آن بیان نمود:

۱- ضریب زاویه خط D نسبت تصاویر يك بردار غیر مشخص $\vec{AB'}$ واقع روی

خط بوده یعنی: $m = \frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'}$ میباشد.

۲- همچنین نسبت نمو طول بنمو عرض وقتی که از نقطه A بنقطه دیگر B که

روی خط واقع شده اند برویم میباشد.

۳- و همچنین نسبت کوسینوسهای هادی يك امتداد روی خط نیز خواهد

بود: $m = \frac{\beta}{\alpha}$

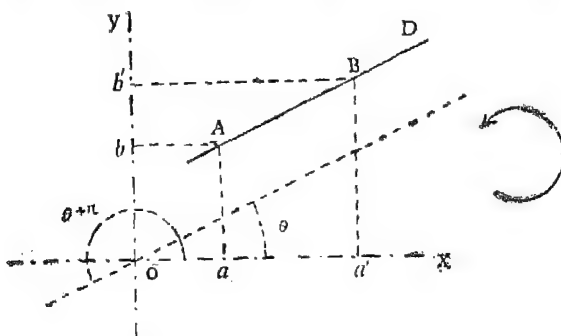
زاویه دو خط

D و D' که توسط ضریب

زاویشان مشخص شده

اند فقط با تقریب π

در صفحه راستا دار



تعیین گشته و از آنجا ظل آن معین بوده و برای بدست آوردن آن از دستور قبل استفاده میکنیم بدین ترتیب که صورت و مخرج را بر $\alpha \alpha'$ تقسیم میکنیم. از آنجا:

$$tg(D, D') = \frac{m' - m}{1 + m m'}$$

بدست آمده و شرط عمود بودن در اینحال بصورت: $1 + m m' = 0$

نوشته میشود.

۴۲- پارامترهای هادی يك خط در صفحه - پارامترهای هادی يك خط و یا يك دسته خط موازی تصاویر (p, q) يك بردار غیر مشخص واقع روی خط و یا يکي از خطوط دسته میباشد.

پارامترهای هادی يك خط کاملاً مشخص نبوده یعنی دودستگاه پارامتر (p, q) و (p', q') يك خط باهم متناسب میباشد و از آنجا میتوان گفت که پارامترهای هادی با تقریب يك ضریب متناسب معلوم میباشد.

شرط موازی بودن دو امتداد با پارامترهای (p, q) و (p', q') : $p q' - q p' = 0$

و شرط عمود بودن آنها: $p p' + q q' = 0$ خواهند بود.

ضرب زاویه نسبت پارامترهای هادی بوده $m = \frac{q}{p}$ و بالاخره پارامترهای هادی

اصلی (α, β) يك خط راستا دار I را میتوان يك دستگاه پارامترهای خط بدون راستای D که منطبق بر I باشد دانست. چنانکه دیدیم (α, β) تصاویر يك بردار يکه α واقع روی I بوده و از طرفی (p, q) تصاویر يك بردار غیر مشخص α واقع روی همان امتداد بوده و از آنجا رابطه بین آنها چنین خواهد بود:

$$\frac{\alpha}{p} = \frac{\beta}{q} = \frac{\pm 1}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

۴۳- پارامترهای هادی يك امتداد در فضا - برای يك خط بدون راستا

در فضا ضریب زاویه وجود نداشته ولی میتوان امتداد آنرا بكمك پارامترهای هادی مشخص نمود.

پارامترهای هادی يك امتداد تصاویر (p, q, r) يك بردار غیر مشخص واقع روی آن امتداد بوده و البته تمام خطوط موازی را میتوان دارای همان دستگاه پارامتر فرض نمود.

پارامترهای هادی با تقریب يك ضریب تناسب معلوم بوده و از آنجا هر رابطه بین آنها همگن خواهد بود.

چنانکه دو امتداد با پارامترهای (p, q, r) و (p', q', r') داده شده باشند

$$\text{شرط موازی بودن آنها: } \frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'}$$

و شرط عمود بودن آنها $pp' + qq' + rr' = 0$ خواهند بود.

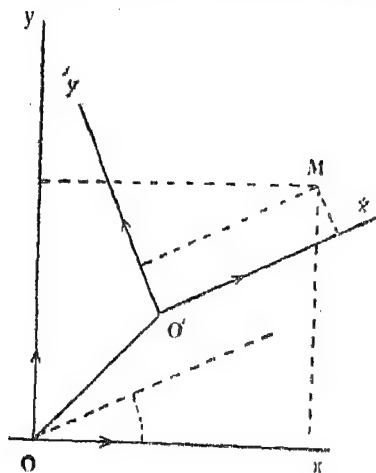
و بالاخره حیب تمامهای هادی يك محور واقع روی يك امتداد با تقریب

علامت تعیین گشته و مقادیر آنها بر حسب m و q و r چنین اند:

$$\alpha = \frac{\pm p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \quad \beta = \frac{\pm q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \quad \gamma = \frac{\pm r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

۴۴ - تغییر محورهای مختصات در صفحه - دو دستگاه مختصات قائم

$(0x, 0y)$ و $(0'x', 0'y')$ در صفحه راستا داری داده شده اند میخواهیم



ش ۲۰

چنانکه مختصات نقطه M از صفحه و یا

تصاویر يك بردار \vec{a} در صفحه را نسبت به

دستگاهی بدانیم مختصات این نقطه و یا تصاویر

آن بردار را نسبت بدستگاه دیگر و یا بطور

کلی روابط بین این دو دستگاه مختصات را

تعیین کنیم بر حسب آنکه مختصات مبدأ $0'$

دستگاه دوم را نسبت بدستگاه اول و زاویه

$\alpha = (0'x' \text{ و } 0x)$ در محور را داشته باشیم

مختصات نقطه $0'$ را نسبت بدستگاه دیگر

x_0 و y_0 و مختصات نقطه M را نسبت بدو دستگاه بترتیب (x, y) و (x', y') و همچنین بردارهای i و j و i' و j' فرض میکنیم.

تصاویر بردار i' در روی $0x$ و $0y$ و یا کسینوسهای هادی امتداد $0'x'$ بترتیب

مساوی: $\cos(0x, 0'x') = \cos \alpha$ و $\cos(0y, 0'y') = \sin \alpha$ میباشد.

بستگی اخیر پس از نوشتن رابطه شال جهت زوایا بدست میآید زیرا:

$$(0y, 0'x') = (0y, 0x) + (0x, 0'x') = \alpha - \frac{\pi}{4}$$

$$\cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \sin \alpha \quad \text{و} \quad \text{میباشد}$$

و همینطور تصاویر بردار j' روی $0x$ و $0y$ بترتیب:

$$\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \cos \alpha \quad \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = -\sin \alpha$$

خواهند بود زیرا در اینحال زاویه مربوطه $\alpha + \frac{\pi}{4}$ میباشد.

پس از آنچه گفته شد بستگی های زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \vec{00'} &= x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j} \\ \vec{i'} &= \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha \quad \vec{j'} = -\vec{i} \sin \alpha + \vec{j} \cos \alpha \end{aligned}$$

حال برای بدست آوردن معادلات مطلوب بستگی هندسی زیر را مینویسیم:

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= \vec{00'} + \vec{O'M} = (x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}) + (x' \vec{i'} + y' \vec{j'}) \\ &= x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + x' (\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) + y' (-\vec{i} \sin \alpha + \vec{j} \cos \alpha) \end{aligned}$$

چنانکه بر حسب i و j مرتب کنیم خواهیم داشت:

$$\vec{OM} = (x_0 + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) \vec{i} + (y_0 + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) \vec{j}$$

حال از طرفی $\vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j}$ بوده.

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = y_0 + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases} \quad \text{پس از آنجا:}$$

که فرمولهای تبدیل مختصات يك نقطه میباشد خواهیم داشت.

در مورد يك بردار دستور های فوق بدین صورت در می آیند :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= X' \vec{i}' + Y' \vec{j}' = X' (\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) + Y' (-\vec{i} \sin \alpha + \vec{j} \cos \alpha) \\ &= (X' \cos \alpha - Y' \sin \alpha) \vec{i} + (X' \sin \alpha + Y' \cos \alpha) \vec{j}\end{aligned}$$

و از آنجا دستور های تبدیل مولفه های يك بردار :

$$\begin{cases} X = X' \cos \alpha - Y' \sin \alpha \\ Y = X' \sin \alpha + Y' \cos \alpha \end{cases}$$

و از همین راه و یا با حل دستور های بالا نسبت به x' و y' دستور های عکس

دستور های فوق را که مختصات جدید را بر حسب مختصات قدیم بدهد خواهیم داشت

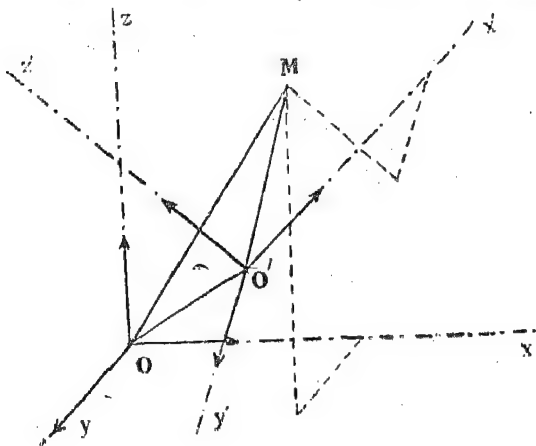
$$\begin{cases} x' = (x - x_0) \cos \alpha + (y - y_0) \sin \alpha \\ y' = -(x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \cos \alpha \end{cases}$$

۴۵ - حالات مخصوص - محور های جدید با محور های قدیم موازیند .

دستور های بالا بصورت : $\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases}$ در می آیند .

چنانکه مبدا ثابت باشد کافی است که در دستور های بالا x_0 و y_0 را صفر کنیم

۴۶ - تغییر محور های مختصات در فضا - دو دستگاه محور های مختصات



قائم و مستقیم $O'x'y'z'$ و $Oxyz$

در فضای راستا داری فرض کرده

میخواهیم چنانکه مختصات مبدا

O' دستگاه دوم (x_0, y_0, z_0) را

نسبت بدستگاه اول و همچنین

کوسینوسهای هادی محور های

جدید را نسبت به محور های قدیم

یعنی : (α, β, γ)

ش ۲۱

و $(\alpha', \beta', \gamma')$ و $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$

را بدانیم بستگی های موجود بین مختصات (x, y, z) و (x', y', z') يك نقطه M در این

→ دو دستگاه مختصات و یا بین تصاویر (X, Y, Z) و (X', Y', Z') يك بردار \vec{O}

	Ox	Oy	Oz
Ox'	α	β	γ
Oy'	α'	β'	γ'
Oz'	α''	β''	γ''

را پیدا کنیم.

برای رفع اشتباه کوسینوسهای هادی را

در جدولی مینویسیم:

در این جدول هر يك از عوامل کوسینوس

بین دو محور مربوطه است.

از طرفی هر کوسینوس را میتوان حاصل ضرب داخلی دو بردار يککه واقع

روی محور ها دانست یعنی:

$$\begin{aligned} \alpha &= \vec{i} \cdot \vec{i}' & \beta &= \vec{j} \cdot \vec{i}' & \gamma &= \vec{k} \cdot \vec{i}' \\ \alpha' &= \vec{i} \cdot \vec{j}' & \beta' &= \vec{j} \cdot \vec{j}' & \gamma' &= \vec{k} \cdot \vec{j}' \\ \alpha'' &= \vec{i} \cdot \vec{k}' & \beta'' &= \vec{j} \cdot \vec{k}' & \gamma'' &= \vec{k} \cdot \vec{k}' \end{aligned}$$

این ۹ کوسینوس مستقل نبوده وبستگی های موجود بین آنها را بعد یادآور

می شویم.

بر حسب مفروضات مسئله بستگی های برداری زیر را مینویسیم:

$$\begin{aligned} \vec{OO'} &= x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k} \\ \vec{i}' &= \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k} \\ \vec{j}' &= \alpha' \vec{i} + \beta' \vec{j} + \gamma' \vec{k} \\ \vec{k}' &= \alpha'' \vec{i} + \beta'' \vec{j} + \gamma'' \vec{k} \\ \vec{OM} &= x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \end{aligned}$$

حال:

$$= (x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k}) + (x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}')$$

چنانکه بجای \vec{i}' و \vec{j}' و \vec{k}' مقادیرشان را قرار داده و نسبت به \vec{i} و \vec{j} و \vec{k}

مرتب کنیم از مقایسه بستگی حاصل با بستگی: $\vec{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$

دستور های تبدیل مختصات بدست می آیند:

$$x = x_0 + \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z'$$

$$y = y_0 + \beta x' + \beta' y' + \beta'' z'$$

$$z = z_0 + \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z'$$

دو مورد تصاویر يك بردار مبداء دخالت نكرده و دستورهائى زير را خواهيم داشت :

$$X = \alpha X' + \alpha' Y' + \alpha'' Z'$$

$$Y = \beta X' + \beta' Y' + \beta'' Z'$$

$$Z = \gamma X' + \gamma' Y' + \gamma'' Z'$$

چنانكه فرمولهائى بالا را نسبت به x' و y' و z' حل كنيم دستورهائى عكس

آنها را خواهيم داشت :

$$x' = \alpha (x - x_0) + \beta' (y - y_0) + \gamma' (z - z_0)$$

$$y' = \alpha' (x - x_0) + \beta (y - y_0) + \gamma'' (z - z_0)$$

$$z' = \alpha'' (x - x_0) + \beta'' (y - y_0) + \gamma'' (z - z_0)$$

تقصيره - چنانكه گفتيم ۹ حبيب تمام بالا مستقل نبوده و بين آنها بستگى هاى

زير كه رويهم پيش از شش بستگى مستقل نيستند بر قرار ميباشند :

بستگى هاى ۱

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \quad \text{بصورت بردارى}$$

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1 \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha' \alpha'' + \beta' \beta'' + \gamma' \gamma'' = 0 \\ \alpha'' \alpha + \beta'' \beta + \gamma'' \gamma = 0 \\ \alpha \alpha' + \beta \beta' + \gamma \gamma' = 0 \end{cases} \quad \text{بصورت كارتزين}$$

بستگى هاى ۲

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 1 \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \quad \text{بصورت بردارى}$$

$$\begin{cases} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1 \\ \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1 \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta \gamma + \beta' \gamma' + \beta'' \gamma'' = 0 \\ \gamma \alpha + \gamma' \alpha' + \gamma'' \alpha'' = 0 \\ \alpha \beta + \alpha' \beta' + \alpha'' \beta'' = 0 \end{cases} \quad \text{بصورت كارتزين}$$

و بالاخره چنانكه شرايط بهم عمود بودن سه بردار را بنويسيم :

$$\vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{k}$$

$$\vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{i}$$

$$\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$$

$$\begin{cases} \alpha = \beta' \gamma'' - \gamma' \beta'' \\ \beta = \gamma' \alpha'' - \alpha' \gamma'' \\ \gamma = \alpha' \beta'' - \beta' \alpha'' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha' = \beta'' \gamma - \gamma'' \beta \\ \beta' = \gamma'' \alpha - \alpha'' \gamma \\ \gamma' = \alpha'' \beta - \beta'' \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha'' = \beta \gamma' - \gamma \beta' \\ \beta'' = \gamma \alpha' - \alpha \gamma' \\ \gamma'' = \alpha \beta' - \beta \alpha' \end{cases}$$

و همچنین نسبت سه بردار یکه دیگر بستگی های :

$$\vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{k} \quad \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{i} \quad \vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$$

۱ میتوان نوشت . از طرفی حاصل ضربهای مختلط زیر همگی مساوی یک بوده .

$$\vec{i} (\vec{j} \wedge \vec{k}) = \vec{j} (\vec{k} \wedge \vec{i}) = \vec{k} (\vec{i} \wedge \vec{j}) = ۱$$

$$\vec{i}' (\vec{j}' \wedge \vec{k}') = \vec{j}' (\vec{k}' \wedge \vec{i}') = \vec{k}' (\vec{i}' \wedge \vec{j}') = ۱$$

و چنانکه گفتیم این بستگی ها مستقل نبوده و اگر مثلاً شش بستگی ۱ را

داشته باشیم میتوانیم از آنها بستگی های دیگر را نتیجه بگیریم .

۴۷- زوایای اولر - چنانکه دیدیم نه کوسینوس هادی توسط ۶ بستگی

به هم مربوطند پس باید بتوان آنها را بر حسب سه پارامتر بیان نمود .

این سه پارامتر سه زاویه اولر بوده و بدین ترتیب تعیین میشوند :

دو دستگاه مختصات قائم فرض نموده از نقطه ۰ مبدأ اولی سه وجهی دیگری

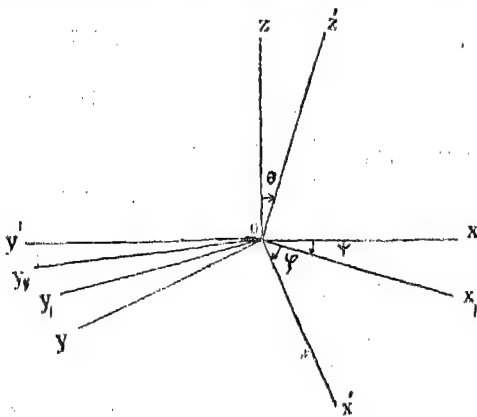
موازی و همسوی سه وجهی دوم مرور میدهیم بدین ترتیب دو سه وجهی $0 x y z$ و

$0 x' y' z'$ خواهیم داشت . خط تلاقی دو صفحه $0 x y$ و $0 x' y'$ را که عمود بر صفحه

$0 x z$ است $0 x_1$ نامیده در روی این خط سوئی را سوی مثبت اختیار میکنیم .

زوایای اولر عبارتند از : $\psi = (0 x, 0 x_1)$ موسوم به *Precession*

$\theta = (0 z, 0 z')$ و $\varphi = (0 x_1, 0 x')$ و *Rotation propre* و یا



حال ثابت میکنیم که با داشتن

این سه زاویه میتوان وضعیت سه

وجهی دوم را نسبت به سه وجهی

اول کاملاً مشخص نمود بدین

منظور دو امتداد دیگر $0 y_1$ و

$0 y_2$ را عمود مستقیم به $0 x_1$ در

صفحات $0 x y$, $0 x' y'$ انتخاب

می کنیم .

دو سه وجهی دیگر $0 x_1 y_1 z$ و $0 x_1 y_2 z'$ بدست آمده و ثابت میکنیم که با سه دوران میتوان از سه وجهی اول به سه وجهی دوم رسید.

دوران اول عبارتست از دوران بزایویه ψ در حول $0 z$ سه وجهی اول بر سه وجهی $0 x_1 y_1 z$ منطبق میگردد.

دوران دوم عبارت از دوران بزایویه θ در حول $0 x_1$ بوده سه وجهی $0 x_1 y_1 z$ به سه وجهی $0 x_1 y_2 z'$ مبدل میگردد.

دوران سوم دوران بزایویه φ در حول $0 z'$ بوده سه وجهی $0 x_1 y_2 z'$ به سه وجهی $0 x' y' z'$ منطبق میگردد زیرا محور $0 z'$ ثابت بوده و چون $0 x_1$ بر $0 x'$ منطبق میشود پس $0 y_2$ هم منطبق بر $0 y'$ خواهد شد چون هر دو سه وجهی قائمند حال برای برقراری دستورهای تبدیل مختصات ملاحظه میکنیم که چنانکه x', y', x و z', y', z را مختصات M نسبت بدو دستگاه $0 x y z$ و $0 x' y' z'$ بگیریم با رفتن از دستگاه $0 x y z$ بدستگاه $0 x_1 y_1 z$ ارتفاع z نقطه M تغییر نکرده و مسئله منجر بتبدیل دستگاه مختصات در صفحه $x y$ میگردد چنانکه x_1 و y_1 مختصات جدید باشند میدانیم که فرمولهای تغییر دستگاه در این حال:

$$x = x_1 \cos \psi - y_1 \sin \psi$$

$$y = x_1 \sin \psi + y_1 \cos \psi$$

میباشند چنانکه از دستگاه اخیر بدستگاه $0 x_1 y_2 z'$ برویم طول x_1 تغییر نکرده و معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$y_1 = y_2 \cos \theta - z' \sin \theta$$

$$z = y_2 \sin \theta + z' \cos \theta$$

و بالاخره چنانکه از دستگاه $0 x_1 y_2 z'$ بدستگاه $0 x' y' z'$ برویم z' تغییر نکرده پس معادلات بصورت:

$$x_1 = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi$$

$$y_2 = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi$$

در آمده و چنانکه x_1, y_1, x را بین این بستگی ها حذف کنیم

$$\begin{cases} x = (x' \cos \varphi - y' \sin \varphi) \cos \psi - [(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) \cos \theta - z' \sin \theta] \sin \psi \\ y = (x' \cos \varphi - y' \sin \varphi) \sin \psi + [(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) \cos \theta - z' \sin \theta] \cos \psi \\ z = (x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) \sin \theta + z' \cos \theta \end{cases}$$

و یا:

$$\begin{cases} x = x' (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta) - y' (\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \theta) + z' \sin \theta \sin \psi \\ y = x' (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \theta) - y' (\sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \cos \theta) - z' \sin \theta \cos \psi \\ z = x' \sin \varphi \sin \theta + y' \cos \varphi \sin \theta + z' \cos \theta \end{cases}$$

که فرمولهای اولر نامیده میشوند خواهیم داشت. ضرایب x' و y' و z' این بستگی ها مقادیر کوسینوسهای هادی بر حسب زوایای اولر میباشند.

۴۸ - مختصات قطبی یک بردار - در صفحه راستا دار نقطه O قطب

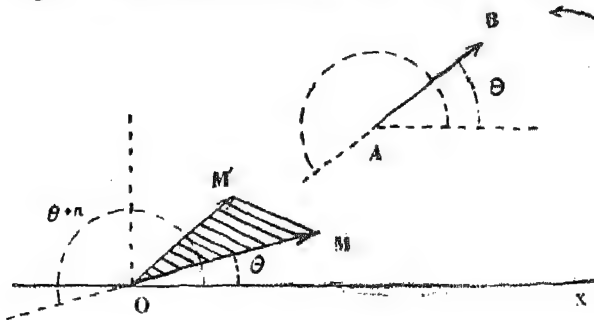
و محور Ox موسوم بمحور قطبی مفروض میباشند برای تعیین بردار \vec{AB} سوی مستقیم روی حامل آن انتخاب کرده این سو را z' مینامیم مختصات قطبی AB اندازه $\rho = \overline{AB}$ روی z' و گوشه $\theta = (Ox, z')$ میباشند.

بر دستگاه ρ و θ یک بردار مربوط بوده ولی بالعکس چنانکه یک بردار داشته

باشیم دو دستگاه بینهایت مختصات قطبی:

$$\begin{cases} \theta + 2\pi \\ \rho \end{cases} \quad \begin{cases} \theta + \pi + 2\pi \\ -\rho \end{cases}$$

مربوط بآن میباشند زیرا میتوان دو سوی مثبت مخالف روی \vec{AB} انتخاب نمود.



بستگی های

زیر بین مختصات

کارترین x'

یک بردار و مختصات

قطبی آن بر قرار

میباشند:

ش ۲۳

$$\begin{aligned} X &= \rho \cos \theta \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{Y}{X} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= \rho \sin \theta \\ \rho &= \frac{X}{\cos \theta} = \frac{Y}{\sin \theta} \end{aligned}$$

۴۹ - مختصات قطبی يك نقطه - مختصات قطبی نقطه M همان مختصات

قطبی بردار \vec{OM} میباشد در این حال ρ را شعاع حامل و θ را زاویه قطبی نقطه M نامند و همانطور که در مورد بردار گفته شد دو دسته بینهایت مختصات قطبی جهت هر نقطه موجود است و آنها عبارتند از:

$$\begin{array}{cc} \theta + 2k\pi & \theta + \pi + 2k\pi \\ \rho & -\rho \end{array}$$

بستگی های زیر بین مختصات قطبی و مختصات کارتزین وابسته بدستگاه قطبی موجود میباشد.

$$\begin{array}{ll} x = \rho \cdot \cos \theta & y = \rho \cdot \sin \theta \\ \text{و یا:} & \rho = \frac{x}{\cos \theta} = \frac{y}{\sin \theta} \\ \text{tg } \theta = \frac{y}{x} & \end{array}$$

۵۰ - حاصل ضرب داخلی و خارجی دو بردار - مختصات قطبی دو بردار

\vec{a} و \vec{a}' واقع در يك صفحه راستا دار را بترتیب (ρ, θ) و (ρ', θ') فرض نموده حاصل ضرب داخلی آنها: $(\rho \cdot \rho' \cos(\theta' - \theta))$ خواهد بود. $\vec{a} \cdot \vec{a}' = \rho \cdot \rho' \cos(\theta' - \theta)$ چنانکه ρ را بردار يکة عمود بصفحة فرض کنیم حاصل ضرب خارجی آنها نیز: $\vec{a} \wedge \vec{a}' = [\rho \rho' \sin(\theta' - \theta)] \vec{k}$ میباشد.

۵۱ - فاصله و مساحت در مختصات قطبی - دو نقطه M و M' را با مختصات

قطبی (ρ, θ) و (ρ', θ') و مختصات کارتزین (x, y) و (x', y') فرض کرده مجذور فاصله آنها:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM'}^2 &= (\vec{OM}' - \vec{OM}) \cdot (\vec{OM}' - \vec{OM}) = (\vec{OM}')^2 + (\vec{OM})^2 - 2 \cdot \vec{OM}' \cdot \vec{OM} \\ &= \rho'^2 + \rho^2 - 2\rho \cdot \rho' \cdot \cos(\theta' - \theta) \end{aligned}$$

خواهد بود. مساحت مثلث OMM' را نیز میتوان ازراه حاصل ضرب خارجی بدست

آورد این سطح + یا - است برحسب آنکه شعاع حامل که از M بسمت M' برود در جهت مثبت یا منفی صفحه چرخش نماید. این سطح مساوی نصف اندازه حاصل ضرب خارجی $\vec{OM} \wedge \vec{OM}'$ میباشد:

$$\text{سطح } OMM' = \frac{1}{r} \rho \rho' \cdot \sin(\theta' - \theta) = \frac{1}{r} (xy' - y'x)$$

۵۴- گوشه های قطبی خط راستا دار در فضا - میتوان امتداد خط

راستاداری را در فضا توسط دوزاویه معین کرد بدین منظور خط $0x'$ را که بموازات خط مفروض و همسوی آن رسم شده است روی صفحه $0xy$ تصویر میکنیم. بر روی خط حاصل سوئی را سوی مثبت میگیریم.

چنانکه آنرا $0x'$ بنامیم صفحه $0x'$ و $0x$ شامل $0z$ بوده در این صفحه سوی + دوران را از $0z$ بسمت $0x'$ میگیریم.

زوایای: $\varphi = (0x, 0x')$ و $\theta = (0z, 0x')$ با تقریب 2π در صفحات راستا دار $(0x, 0y)$ و $(0z, 0x')$ تعیین گشته و آنها را زوایای قطبی امتداد راستا دار و با ساسی طول سماوی و متمم عرض سماوی نامیده میشوند

واضح است که چنانکه (φ, θ) داده شده باشند امتداد خط راستا دار مشخص گشته ولی برعکس بهر خط راستا دار دو دستگاه زوایای قطبی مربوط میباشند. بر حسب آنکه امتداد مثبت روی $0x'$ را تغییر دهیم این دو دستگاه بترتیب: (φ, θ) و $(\varphi + \pi, -\theta)$ خواهند بود.

چنانکه \vec{u} و $\vec{u'}$ را بردارهای یک امتداد های $0x'$ و $0x$ بگیریم بستگی

های موجود بین گوشه های قطبی و کوسینوس های هادی عبارتند از:

$$\vec{u} = \vec{u'} \cdot \sin \theta + \vec{k} \cdot \cos \theta$$

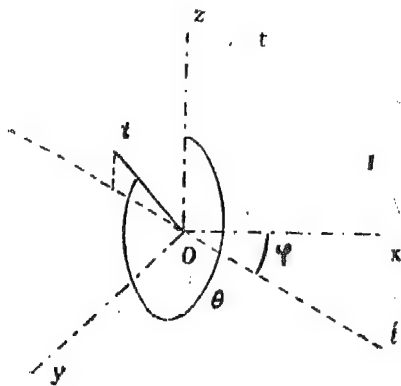
$$\vec{u'} = \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi$$

و از آنجا:

$$\vec{u} = \vec{i} \cos \varphi \sin \theta + \vec{j} \sin \varphi \sin \theta + \vec{k} \cos \theta$$

پس از آنجا نتیجه میشود که کوسینوس

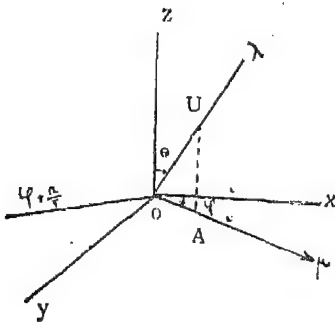
های هادی امتدادی بازوایای قطبی (φ, θ)



بترتیب $\sin \theta \cos \varphi$ روی x و $\sin \theta \sin \varphi$ روی y و $\cos \theta$ روی z میباشند .

۵۳ - مختصات قطبی و استوانه در فضا - سهوجهی قائم xyz را فرض

کرده مختصات قطبی نقطه U مقادیر ρ و φ و θ بوده و بدین ترتیب معین میشوند که درروی خط OU امتداد مثبت z را انتخاب کرده ρ را اندازه جبری \vec{OU} و θ و گوشه های قطبی این امتداد خواهند بود .



چنانکه U را در روی صفحه xOy

تصویر کنیم و مختصات قطبی ρ و θ نقطه u

حاصل را در نظر بگیریم مقادیر ρ ، θ ، φ را دستگاه مختصات استوانه نقطه U مینامند .

۵۴ - مختصات همگن - چنانکه نقطه

ش ۲۵

M طوری در فضا حرکت کند که OM بینهایت

شود گوئیم که M بسمت بینهایت دور میشود . چنانکه (x, y, z) مختصات کارتزین نقطه M باشند لااقل یکی از آنها در حد بینهایت شده و چنانکه نقطه N در صفحه واقع نباشد هر سه آنها بینهایت میشوند و برعکس چنانکه مختصات یک نقطه بینهایت شوند آن نقطه در بینهایت واقع است ولی از امتدادی که آن نقطه در امتداد آن به بینهایت رفته است اطلاعی در دست نیست رفع این نقص را با بکار بردن مختصات همگن میتوان نمود .

تعریف - مختصات همگن نقطه $M(x, y, z)$ هر دستگاه مرکب از چهار

عدد X, Y, Z, T می باشد بطوریکه بین آنها و مختصات معمولی بستگی های :

$$x = \frac{X}{T} \quad y = \frac{Y}{T} \quad z = \frac{Z}{T}$$

بر قرار باشند .

چنانکه میبینیم هر نقطه دارای بینهایت دستگاه مختصات همگن بوده و چنانکه

$T = 1$ باشد X, Y, Z همان مختصات معمولی خواهند شد .

اگر نقطه M در امتداد OZ که پارامترهای هادی آن (α, β, γ) است به سمت بینهایت دور شود میتوانیم در هر لحظه $X'Y'Z'$ را پارامترهای هادی OM فرض کنیم البته در حد این اعداد باید متناسب α', β', γ' شوند با استفاده از اینکه مختصات همگن با ضریب یک تناسب معلوم اند میتوان آنها را در حد مساوی α', β', γ' گرفت. از طرفی چون $x' = y' = z'$ بینهایت میشوند و چون $X'Y'Z'$ هر سه مخالف صفرند لازمست که T بسمت صفر میل نماید. پس از آنجا نتیجه میشود که چنانکه M بسمت بینهایت در امتداد OZ رود مختصات همگن آن بسمت $(\alpha, \beta, \gamma, 0)$ میل خواهند کرد.

و برعکس چنانکه $X'Y'Z'T'$ بسمت $\alpha', \beta', \gamma', 0$ میل کنند چون لااقل یکی از پارامترهای هادی α', β', γ' صفر نیست پس یکی از مختصات x', y', z' بینهایت خواهد شد. از طرفی پارامترهای $X'Y'Z'$ در حد α', β', γ' شده و OM دارای وضعیت حد OZ خواهد شد. و بالاخره میتوان گفت که نقطه واقع در بینهایت در امتدادی با پارامترهای هادی α', β', γ' دارای مختصات همگن $(\alpha, \beta, \gamma, 0)$ میباشد پس میتوان با بکار بردن مختصات همگن نقاط بینهایت را از هم جدا نموده و با بکار بردن این مختصات یگانه اختلاف بین نقاط بینهایت و نزدیک آنست که بازاء آنها $T = 1$ میباشد.

۵۵- نقاط موهومی - تا بحال مختصات نقاط را اعداد حقیقی فرض کرده بودیم چنانکه مختصات نقطای اعداد موهومی باشند آن نقاط را موهومی گویند. چنانکه هر سه عدد حقیقی باشند آن نقطه حقیقی و اگر یکی از آنها موهومی باشد آن نقطه موهومی خواهد شد. نقاط موهومی از لحاظ تعمیم قضایای هندسی بکار رفته و همان تعاریف و دستورهای نقاط حقیقی در باره آنها صادق میباشد.

بخش سوم

خط و سطح

۵۶ - معادله خط در صفحه - منظور طرز نمایش خط غیر مشخص یعنی منحنی و یا خم در صفحه می باشد. چنانکه دیده میشود مختصات نقاط مختلف يك منحنی در صفحه مقادیر مستقل نداشته و فرض میکنیم که بین مختصات کارترین نقاط آن بستگی :

$$f(x, y) = 0 \quad (1)$$

برقرار باشد. البته بین مختصات این نقاط بیش از يك رابطه نمیتواند وجود داشته باشد زیرا در غیر این صورت میتوان x و y را از این بستگی ها پیدا نمود و در نتیجه نقاط مربوط بآنها معدود خواهند بود.

و بر عکس نقاطی از صفحه که مختصات آنها در بستگی (۱) صدق میکنند در نظر میگیریم چنانکه به x مقدار معینی بدهیم ریشه های این معادله مقادیر y_1, y_2, y_3, \dots بوده و نقاط مربوطه آنها $M_1(x, y_1)$ و $M_2(x, y_2)$ و $M_3(x, y_3) \dots$ میباشند چنانکه حال x را از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر دهیم این نقاط در صفحه نمایش قوسهایی که تشکیل تمام منحنی (C) معادله (۱) را میدهند خواهند داد.

پس بطور کلی معادله (۱) معادله منحنی (C) خواهد بود چنانچه مختصات هر نقطه (C) در معادله (۱) صدق کرده و بر عکس هر نقطه که مختصات آن در (۱) صدق کند جزو منحنی (C) میباشد.

تبصره - آنچه که درباره مختصات کارترین گفته شد در باره هر نوع مختصات دیگر نیز صادق میباشد. از طرفی استدلال فوق چنانکه معادله (۱) دارای y نباشد صحیح نبوده و در اینحال این معادله بازاء مقادیری از x برقرار خواهد بود. مکان این نقاط خطی موازی $y=0$ خواهد شد.

۵۷ - منحنی های جبری - منحنی جبری منحنی می باشد که معادله آن در مختصات کارترین بصورت کثیر الجمله از x و y نوشته شود. درجه این کثیر الجمله

درجه منحنی خواهد بود. بآسانی میتوان ثابت نمود که این تعریف بستگی بانتخاب محور ها نخواهد داشت زیرا دستور های تغییر محور ها معادلاتی از درجه اول بوده و در نتیجه درجه معادله تغییر یافته همان درجه معادله اول خواهد بود.

قضیه - هر منحنی جبری از درجه m در m نقطه هر خط مستقیم از صفحه را تلاقی مینماید.

اثبات - بر حسب آنچه که گفته شد میتوان محور های مختصات را طوری انتخاب کرد که خط مقروض محور x باشد پس برای یافتن نقاط تلاقی باید $y = 0$ نمود پس معادله حاصل $f(x, 0) = 0$ (۲) از درجه m شده و دارای m ریشه که مربوط به m نقطه تلاقی اند خواهد بود.

ولی باید یاد آور شد که گاهی ممکن است درجه معادله (۲) باندازه m واحد از m کوچکتر باشد در اینحال گویند m نقطه برخورد در بینهایت میباشد. همچنین چنانکه معادله (۲) دارای ریشه مکرر از مرتبه r باشد باید نقطه مربوطه را r دفعه حساب کرده و بهمین ترتیب اگر معادله (۲) دارای ریشه های موهومی باشد باید نقاط موهومی مربوطه را نیز حساب نمود.

قضیه - برای آنکه دو معادله $f(x, y) = 0$ و $g(x, y) = 0$ نمایش يك منحنی را بدهند لازم و کافیتست که دارای جملاتی متناسب باشند.

اولا این شرط کافی است زیرا چنانچه بر قرار باشد خواهیم داشت:

$$g(x, y) \equiv kf(x, y) \quad (3)$$

و در نتیجه هر نقطه که مختصاتش در f صدق کند در g نیز صدق خواهد کرد و بر عکس.

ثانیاً شرط بالا لازم است زیرا چنانچه این دو معادله نمایش يك منحنی را بدهند باید بازاء هر مقدار y دارای ریشه های مساوی نسبت به x باشند و در نتیجه این دو کثیر الجمله که بر حسب x در نظر گرفته شوند باید دارای ضرایبی

متناسب باشند. بهمین ترتیب اگر در این استدلال جای x و y را عوض کنیم خواهیم دید که باید کثیر الجمله ها متناسب و ضرب تناسب هم عدد ثابتی باشد.

منحنی های غیر جبری را ترانساندان نامند. معادله این منحنی ها را نمیتوان با هیچ نوع تبدیلی بصورت کثیر الجمله جبری درآورد.

۵۸ - معادلات پارامتری يك منحنی - طریقه دیگر نمایش دادن يك منحنی بصورت پارامتری میباشد. بدین منظور بازاء هر نقطه M منحنی يك عدد t كه پارامتر آن نامیده میشود مربوط می کنیم. t را طوری انتخاب میکنند كه تغییر پیوسته آن تغییر مکان پیوسته جهت M نیز ایجاد نماید. و بالاخره اغلب اوقات این پارامتر معنای هندسی ساده مثل طول منحنی الخط نقطه یا زاویه قطبی مماس و غیره خواهد داشت پس معادلات پارامتری منحنی را بصورت: $x = f(t)$ $y = g(t)$ (۴) میتوان نوشت. چنانكه منحنی مفروض باشد بینهایت معادلات پارامتری جهت نمایش آن میتوان داشت. هر يك از آنها با تغییر پارامتر t به t' بطوریکه مثلاً $t' = q(t)$ باشد از دیگری نتیجه میشود.

برای بدست آوردن معادله منحنی بصورت (۱) کافی است t را بین دو معادله پارامتری حذف نمائیم.

۵۹ - معادله يك سطح - مختصات کارتزین x ، y ، z نقاط مختلف سطح بارویه مفروض (S) مقادیر مستقل غیر مشخص نمیتوان داشته و بین آنها بستگی بصورت $f(x, y, z) = 0$ وجود خواهد داشت.

و بر عکس نقاطی از فضا را كه مختصات آنها در بستگی (۵) صدق کنند در نظر میگیریم نقاطی كه در صفحه $0' y$ موازی صفحه $0 y$ هستند مكان نقاطی با ارتفاع $0' 0 = h$ صفحه بوده و تشکیل منحنی C_h بمعادله $f(x, y, h) = 0$ (۶) را نسبت بمحورهای $0' x$ و $0' y$ میدهند. چنانكه h را تغییر دهیم این منحنی تشکیل سطح (S) را خواهد داد.

پس بطور کلی معادله (۵) معادله سطح (S) خواهد بود چنانکه مختصات هر نقطه آن در این معادله صدق کرده و بر عکس هر نقطه که مختصات آن در (۵) صدق کند جزو سطح (S) میباشد.

تبصره - چنانکه مرقط بستگی به z داشته باشد استدلال بالا قابل قبول نبوده و در این حال نمایش صفحه موازی $z = 0$ را خواهد داد.

چنانکه مرقط بستگی فقط به x و y داشته باشد نمایش استوانه موازی $z = 0$ را خواهد داد زیرا خطی موازی $z = 0$ سطح را در نقطه m منحنی C بمعادله $0 = \text{مرقط}$ خواهد کرد. قاعده این استوانه منحنی (C) و مولدهای آن موازی $z = 0$ خواهند بود سطوح جبری - سطح جبری سطحی است که معادله آن کثیر الجمله جبری از x و y و z باشد درجه این کثیر الجمله درجه سطح خواهد بود.

بهمان ترتیب که درباره منحنیات جبری گفتیم درجه سطح بستگی بمحورهای مختصات نداشته و قضیه های زیر در باره این سطوح ثابت میشوند.

قضیه - مقطع هر سطح جبری توسط صفحه يك منحنی جبری هم درجه آن سطح خواهد بود.

قضیه - برای آنکه دو کثیر الجمله $f(x, y, z)$ و $g(x, y, z)$ مساوی صفر قرار میدهیم نمایش يك سطح را بدهند لازم و کافی است که دارای جملات متناسب باشند.

اثبات این قضایا نظیر اثبات قضایای مربوطه در صفحه است.

۶۰ - معادلات پارامتری يك سطح - برای نمایش دادن يك سطح بصورت پارامتری بهر نقطه M سطح دو پارامتر u و v که مختصات منحنی الخط سطح نیز نامیده میشوند مربوط میکنیم.

در این حال مختصات M بر حسب u و v نوشته شده و معادلات سطح بصورت پارامتری $x = f(u, v)$ $y = g(u, v)$ $z = h(u, v)$ در میآیند

چنانکه « و v را بر حسب پارامتر دیگری مثلاً t بیان کنیم معادلات حاصل نمایش منحنی (C) واقع روی سطح (S) را خواهند داد.

و همچنین هر رابطه بین « و v يك منحنی از سطح (S) را نمایش خواهد داد

۶۱- منحنی در فضا - برای نمایش منحنی (C) در فضا دو طریقۀ بکار میرود

۱- منحنی توسط مقطع دو سطح تعیین گشته است. منحنی (C) را مقطع

دو سطح (S) و (S') بمعادلات: $f(x, y, z) = 0$ (۸) فرض میکنیم.

$$g(x, y, z) = 0$$

در این حال معادلات (۸) منحنی (C) را در فضا نمایش داده و معادلات آن میباشدند

چنانکه منحنی (C) مفروض باشد بینهایت دستگاه معادله نمایش آنرا میدهند

زیرا بینهایت سطح میتوان فرض نمود که بر این منحنی میگذرند.

۲- منحنی از حرکت يك نقطه در فضا تعیین گشته است. در این حال بهر

نقطه M پارامتر t را مربوط کرده و معادلات منحنی بصورت:

$$(۹) \quad x = f(t) \quad y = g(t) \quad z = h(t)$$

میباشد. چنانکه منحنی با معادلات (۸) نمایش داده شده باشد و بخواهیم آن معادلات

را بصورت (۹) بنویسیم باید مثلاً به x مقدار اختیاری $f(t)$ بررا داده و معادلات (۸)

را نسبت به y و z حل نماییم.

چنانکه در دستگاه (۹) دومعادله اول را در نظر بگیریم این دو معادله نمایش

تصویر منحنی (C) فضائی را روی صفحه xOy میدهند.

۶۲- استوانه های تصویر کننده - بین سطوحی که بر منحنی مفروض

میگذرند استوانه هایی که روی آن تکیه کرده و بموازات محورهای مختصات میباشدند

جهت تصور کردن این منحنیات مفید میباشد. البته قاعده این استوانه ها روی

صفحات مختصات تصاویر منحنی فضائی روی این صفحات بوده و معادله استوانه همان

معادله این منحنی مسطح خواهد بود. برای نوشتن معادله استوانه چنانکه (x', y', z') m

مختصات يك نقطه از قاعده آن باشد هر خط موازی $z = 0$ که بر این نقطه بگذرد

منحنی فضائی (C) را در يك نقطه M قطع کرده و در نتیجه هر نقطه این خط دارای

$$(10) \quad \begin{aligned} f(x', y', z) &= 0 \\ g(x', y', z) &= 0 \end{aligned} \quad \text{مختصات } (x', y', z) \text{ میباشد پس معادلات:}$$

دارای ریشه مشترك z که ارتفاع M است بوده و از آنجا نتیجه میشود که برای بدست آوردن معادله استوانه تصویر کننده منحنی (C) روی xy باید z را بین معادلات (۱۰) و یا بین معادلات (۸) منحنی حذف نموده و همچنین است در مورد استوانه های تصویر کننده دیگر روی صفحات yz و xz

در صورتی که منحنی فضائی با معادلات (۹) نمایش داده شده باشد چنانکه گفتم دو معادله اول آن دستگاه نمایش معادلات پارامتری تصویر آن روی xy بوده و از آنجا نتیجه میشود که برای نوشتن معادله استوانه تصویر کننده روی xy کافی است که z را بین این دو معادله حذف کنیم.

باید یادآور شد که اغلب نمیتوان معادلات دوازده استوانه ها را بجای معادلات منحنی گرفت زیرا علاوه بر (C) این استوانه ها دارای مقاطع دیگری نیز خواهند بود

۶۳ - منحنی جبری - چنانکه بتوان بر يك منحنی فضائی دو سطح جبری مرور داد آن منحنی را جبری گویند.

قضیه - تصاویر يك منحنی جبری جبریند و برعکس. اثبات این قضیه بر حسب تعاریف فوق واضح میباشد زیرا مثلاً اگر z را بین معادلات (۸) حذف کنیم معادله حاصل جبری خواهد بود.

درجه يك منحنی جبری در فضا عدد نقاط برخورد آن با يك صفحه غیر مشخص می باشد.

قضیه - مقطع دو سطح جبری با درجات m و p يك منحنی جبری از درجه mp میباشد.

زیرا عدد نقاط برخورد دو منحنی مسطح از درجات m و p مساوی mp است

و این نقاط همان نقاط برخورد منحنی مقطع دو سطح بایک صفحه میباشند.

۶۴ - خم ها و سطوح موهومی - همانطور که نقاط موهومی جهت تعمیم قضایا بکار میروند بهمان ترتیب بررسی منحنیات و سطوح موهومی لازم میباشد. و اینها بدو صورت دیده میشوند.

حالت اول - معادلات این خم ها و یا این سطوح دارای ضرایب حقیقی بوده ولی مختصات هیچ نقطه حقیقی در آنها صدق نمیکند. در این حال نقاط موهومی این خمها و سطوح دو بدو مزدوج میباشند.

حالت دوم - معادلات این خمها و یا این سطوح با ضرایب موهومی میباشند در این حال اگر سطح موهومی باشد يك منحنی حقیقی روی آنها وجود دارد.

۶۵ - بررسی نامساویها - هندسه تحلیلی بما اجازه میدهد که نامساویهای دو و سه مجهولی را از لحاظ هندسی بررسی نماییم اینک حالت دو مجهولی را در نظر میگیریم.

فرض کنیم نامساوی $f(x, y) > 0$ (۱۱) داده شده باشد میخواهیم به بینیم مختصات چه نقاط از صفحه در این نامساوی صدق میکنند. بدین منظور منحنی $f(x, y) = 0$ (۱۲) را رسم نموده می بینیم که این منحنی صفحه را بنواحی چند تقسیم مینماید هر يك از این نواحی طوریست که میتوان از يك نقطه واقع در آن خطی بنقطه دیگر همان ناحیه بدون آنکه منحنی را قطع نماید کشید. باسانی ثابت میشود که تمام نقاط يك ناحیه (R) يك علامت معینی به فر میدهند. زیرا مثلاً فرض کنیم که دو نقطه P و P' واقع در يك ناحیه دو علامت مخالف به فر بدهند. این دو نقطه را با خطی بهم مربوط کرده بطوریکه این خط منحنی (C) را قطع ننماید چنانکه M از P به P' برود مختصات آن توابع پیوسته از x بوده و این پارامتر از x_1 به x_2 ترقی مینماید در نتیجه $f(x, y)$ تابع پیوسته از x شده و بازاء مقادیر x_1 و x_2 دو مقدار مختلف العلامه خواهد داشت پس لازم می آید که در فاصله بین این دو مقدار

صفر شود یعنی در يك نقطه از خط PMP' تابع ϵ صفر خواهد شد و این خلاف فرض است زیرا که خط مزبور منحنی (C) را قطع نمینماید.

دو ناحیه را مجاور هم گوئیم چنانکه بتوانیم از یکی بدیگری بطوریکه فقط يك دفعه از منحنی (C) بگذریم برویم. دو ناحیه مجاور هم دو علامت مختلف به ϵ خواهند داد. زیرا چنانکه از (C) عبور کنیم ϵ صفر شده و تغییر علامت میدهد.

پس از این مقدمه نقطه در صفحه در یکی از این نواحی انتخاب کرده چنانکه (x_0, y_0, z_0) ϵ مثبت باشد آن ناحیه مثبت و نواحی مجاور آن منفی خواهند بود. و باین ترتیب نواحی از صفحه که در نا مساوی فوق صدق میکنند تعیین میشوند.

در مورد نامساویهای سه مجهولی $\epsilon(x, y, z) > 0$ $\epsilon(x, y, z) = 0$ سطح $\epsilon(x, y, z) < 0$ را در فضا در نظر گرفته و نظیر آنچه که در بالا گفتیم عمل میکنیم.

بخش چهارم

مکان هندسی

۶۶ - در صفحه - مکان هندسی مجموع نقاطی از صفحه را گویند که دارای خاصیت مشترك باشند.

طبق این تعریف برای آنکه مکان هندسی مطالب (L) منحنی (C) باشد باید دو موضوع زیر را ثابت نمود.

- ۱ - هر نقطه از مکان هندسی (L) روی منحنی (C) واقع بوده.
 - ۲ - و برعکس هر نقطه از منحنی (C) خاصیت مکان (L) را دارا میباشد.
- برای تعیین مکان هندسی بطریق تحلیلی باید قبل از هر چیز محورهای مختصات را انتخاب نمود و باید یاد آور شد که سهولت محاسبه بستگی تام با انتخاب محورهای مختصات دارد.

۶۷ - میخواهیم معادلات پارامتری مکان را پیدا نماییم - بدین منظور

نقطه M مکان را در نظر گرفته و پارامتری را نیز انتخاب میکنیم این پارامتر اغلب اوقات معنای هندسی ساده داشته و مختصات M را مستقیماً نسبت به آن حساب میکنیم

۶۸ - میخواهیم معادله مکان را بنویسیم - طریقه مستقیم - نقطه $M(x, y)$

غیر مشخص در صفحه را گرفته و شرط لازم و کافی برای آنکه این نقطه متعلق به مکان باشد مینویسیم بدین ترتیب معادله بین x و y که معادله مکان است بدست میآید.

طریقه غیر مستقیم - در مواردیکه طریقه مستقیم قابل عمل نباشد این طریقه را میتوان بکار برد. پارامتر z را طوری انتخاب میکنیم که بازاء هر مقدار آن یک نقطه از مکان مربوط باشد چنانکه عملیاتی را که برای بدست آوردن آن نقطه بکار میرود از نظر تحلیلی بیان کنیم دو معادله که پارامتر z بستگی دارند خواهیم داشت

$$f(x, y, z) = 0 \quad g(x, y, z) = 0 \quad (۱)$$

ریشه های این دو معادله مختصات نقاط مربوط به پارامتر z را بما میدهند. میتوان همچنین مکان را نقاط برخورد دو دسته منحنی که به پارامتر z بستگی دارند دانست. این دو دسته منحنی را (C) و (C') گرفته و برای بدست آوردن معادله مکان z را بین این دو معادله حذف میکنیم.

برای اثبات این موضوع معادله $R(x, y) = 0$ (۲) را نتیجه حذف پارامتر گرفته گوئیم:

۱ - هر نقطه مکان در معادله (۲) صدق میکند زیرا چنانکه مختصات x و y آنرا در معادلات (۱) گذاریم این معادلات یک ریشه مشترک z لافل خواهند داشت این ریشه z پارامتر مربوط به خمهای (C) و (C') که از آن نقطه میگذرند خواهد بود.

۲ - هر نقطه که مختصات آن در (۲) صدق کند یک نقطه از مکان میباشد زیرا چنانکه مختصات آنرا در (۱) گذاریم این معادلات یک ریشه مشترک z خواهند داشت و باین ریشه یک منحنی (C) و یک منحنی (C') که از آن نقطه میگذرند

مربوط میباشند. پس این نقطه متعلق بمکان خواهد بود.

۶۹ - جوابهای خصوصی - با بکار بردن این طریقه بعضی اوقات ریشه هایی که جوابهای خصوصی نامیده میشوند پیدا خواهند شد.

فرض کنیم که بازاء $\lambda = \lambda_0$ خطوط (C) و (C') برهم منطبق شده و یا لاقطی يك جزء مشترك (S) داشته باشند مختصات هر نقطه (S) در (۲) صدق کرده زیرا بازاء يك مقدار $\lambda = \lambda_0$ در معادلات (۱) صدق میکنند. پس در این حال لازم میآید که $R(x, y)$ لاقطی بدو عامل بطوریکه اگر یکی از آنها را مساوی صفر قرار دهیم نمایش (S) را بدهد تجزیه شود. چنانکه مکان را از مجموع نقاط مشترك دو منحنی (C) و (C') فرض کنیم نمیتوان گفت که (S) جزو مکان نمیباشد ولی در هر حال جزئی از آنست که بجواب خصوصی نامیده میشود.

۷۰ - جوابهای اضافی - همچنین ممکن است که در $R(x, y)$ عوامل اضافی پیدا شوند بطوریکه هر نقطه مختصاتی که آن عامل را صفر کند ولی بازاء همان مختصات معادلات (۱) ریشه مشترکی بر حسب λ نداشته باشند. منحنی مربوطه جزو مکان نبوده و چنین ریشه جواب اضافی یا خارجی نامیده میشود. این عوامل همیشه از محاسبات حذف پارامتر پیدا شده و برای شناختن جوابهای صحیح از جوابهای مخصوص و اضافی بطریق زیر باید عمل نمود:

چنانکه $R(x, y)$ بچند عامل تجزیه شد هر يك از عوامل را جداگانه مساوی صفر گرفته و (A) را منحنی نمایش دهنده یکی از آنها فرض میکنیم. مختصات x و y یکی از نقاط M این منحنی را در (۱) گذارده و ریشه مشترك λ آن دو معادله را پیدا میکنیم. چنانکه این ریشه مشترك موجود نباشد آن عامل اضافی است چنانکه λ وجود داشته ولی با تغییر x و y نقطه M تغییر ننماید آن عامل خصوصی و بالاخره چنانکه ریشه مشترك معادلات (۱) با تغییر λ روی (A) تغییر نماید آن عامل و منحنی نمایش دهنده آن (A) جزء مکان خواهند بود.

۷۱- **طریقه چند پارامتری** - در بعضی موارد پیدا کردن يك پارامتر λ آسان نبوده و میتوان بجای آن چند پارامتر مثلاً m بکار برده و معادلات (۱) را بر حسب آنها بیان نمود. البته برای آنکه فقط يك پارامتر مستقل وجود داشته باشد باید که تمام آنها توسط ۱ - m رابطه بهم مربوط باشند. برای بدست آوردن معادله مکان باید پارامترها را بین این ۱ - m معادله و دو معادله (۱) حذف نمائیم.

۷۲- **مقایسه دو طریقه** - چنانکه دیدیم دو طریقه نوشتن معادلات مکان بصورت پارامتری و طریقه غیر مستقیم برای نوشتن معادله مکان تا بدست آوردن معادلات (۱) هر دو یکی بوده چنانچه λ را حذف کنیم معادله مکان و چنانچه x و y را بر حسب λ بیان کنیم معادلات پارامتری را خواهیم داشت. چنانکه حذف پارامتر غیر عملی بنظر برسد باید همیشه x و y را بر حسب پارامتر نوشت.

تبصره ۵- اگر منحنیهای (C) و (C') بستگی به بیشتر از يك پارامتر مستقل داشته باشند مکان وجود نداشته زیرا در این حال از هر نقطه صفحه دو منحنی میتوان مرور داد ولی بطور استثناء ممکن است که مکان وجود داشته باشد و این موضوع را بدین ترتیب میتوان توجیه نمود که همیشه ممکن است دو دسته بینهایت منحنی فرض نمود که بر منحنی ثابتی گذشته باشند و این منحنی مکان مطلوب باشد.

۷۳- **مکان هندسی در فضا** - در فضا عامل مولد مکان هندسی ممکن است خواه نقطه خواه منحنی باشد در حالت اول مکان ممکن است منحنی یا سطح و در حالت دوم همیشه يك سطح خواهد بود. انتخاب محورهای مختصات قبل از هر چیز لازم بوده و طرز عمل نظیر مکانهای هندسی در صفحه میباشد.

مثلاً چنانکه منحنی فضائی بستگی به پارامتری داشته باشد برای بدست آوردن مکان مطلوب که در این حال سطح است پارامتر را بین دو معادله منحنی حذف میکنیم چنانکه معادله منحنی بصورت پارامتری :

$$x = f(\lambda, \lambda) \quad y = g(\lambda, \lambda) \quad z = h(\lambda, \lambda)$$

داده شده باشد باید λ و μ را بین این معادلات حذف نموده ویا آنکه میتوان این معادلات را معادلات پارامتری سطح (S) فرض نمود.

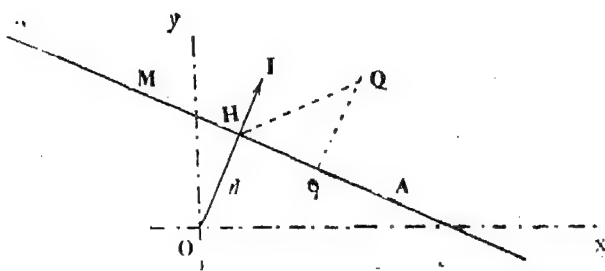
بخش پنجم

خط در صفحه

۷۶- معادله خط مستقیم - در صفحه دو محور قائم Ox و Oy فرض کرده بردارهای یکه \vec{i} و \vec{j} را روی آنها انتخاب میکنیم. نقطه M را بمختصات x و y گرفته قضیه زیر را ثابت میکنیم.

قضیه - هر خط مستقیم (D) را میتوان بصورت يك معادله درجه اول از x و y نمایش داده و بر عکس هر معادله درجه اول از x و y نمایش يك خط مستقیم را میدهد.

طریقه حاصل ضرب داخلی - فرض میکنیم خط (D) از نظر هندسی تعیین



ش ۲۶

گشته معادله آن را

می نویسیم و بعد بر

عکس این قضیه یعنی

يك معادله درجه اول

فرض کرده ثابت

میکنیم که نمایش يك

خط مستقیم را میدهد.

قسمت اول - خط (D) را که از نقطه A بمختصات (x_0, y_0) میگذرد و

عمود به بردار \vec{n} که تصاویر آن (u, v) است گرفته شرط لازم و کافی برای

آنکه نقطه M روی (D) باشد آنست که بردار \vec{OM} در رابطه برداری

$$\vec{n} \cdot \vec{OM} = \vec{n} \cdot \vec{OA} \quad (۱) \text{ صدق کند.}$$

اثبات این بستگی پس از تفسیر هندسی حاصل ضرب داخلی واضح بوده زیرا طرفین معادله مساوی $\vec{n} \cdot \vec{O} \vec{H}$ میباشد.

چنانکه این رابطه را بصورت کارتزین بنویسیم: $\vec{n} \cdot \vec{O} \vec{M} = ux + vy$ بوده و پس از قرار دادن: $\vec{n} \cdot \vec{O} \vec{A} = ux_0 + vy_0 = -w$ معادله بصورت $ux + vy + w = 0$ (۲) که معادله از درجه اول است در خواهد آمد.

قسمت دوم - بر عکس معادله درجه اول $ux + vy + w = 0$ را که در آن u و یا v صفر نباشند فرض کرده (u, v) را تصاویر بردار \vec{n} میگیریم حال گوئیم مکان نقاط M که مختصات آنها در این رابطه صدق میکنند همان مکان نقاط M است که در بستگی برداری: $\vec{n} \cdot \vec{O} \vec{M} + w = 0$ صدق کنند. این مکان خط (D) عمود به بردار \vec{n} در نقطه H بطوریکه:

$$\vec{H} \cdot \vec{n} = -w \quad (۱) \text{ باشد خواهد بود.}$$

تبصره - فاصله نقطه از خط - چنانکه X و Y را مختصات نقطه غیر مشخص Q در صفحه بگیریم و q را تصویر Q روی (D) فرض کنیم طرف اول معادله (۲) مساوی: $uX + vY + w = \vec{n} \cdot \vec{O} \vec{Q} - \vec{n} \cdot \vec{O} \vec{H} = \vec{n} \cdot \vec{H} \vec{Q}$ شده و از آنجا:

$$qQ = \frac{uX + vY + w}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

خواهد شد زیرا qQ تصویر

$\vec{H} \vec{Q}$ روی \vec{n} میباشد. طرف اول این تساوی فاصله نقطه Q از خط (D) بوده و سوی اندازه گیری آن سوی مثبت \vec{n} و یا از جهت خط بسمت نقطه است.

طریقه حاصل ضرب خارجی - خط (D) را که از نقطه $A(x_0, y_0)$ میگذرد موازی بردار $\vec{a}(p, q)$ فرض کرده شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه $M(x, y)$ روی (D) باشد آنستکه بردار $\vec{O} \vec{M}$ در بستگی برداری:

$$(۳) \quad \vec{a} \wedge \vec{O} \vec{M} = \vec{a} \wedge \vec{O} \vec{A}$$

صدق کند چنانکه این بستگی را بصورت کارتزین بنویسیم بستگی :

$$(۴) \quad p y - q x = p y_0 - q x_0$$

که بصورت $u x + v y + w = 0$ است پس از قرار دادن :

$$u = q \quad v = -p \quad w = p y_0 - q x_0$$

بدست خواهد آمد.

و بر عکس معادله

درجه اول :

$$u x + v y + w = 0$$

را فرض کرده بردار

\vec{a} را با تصاویر :

$(-v, u)$ گرفته

گوئیم مکان نقاط M

ش ۲۷

که مختصات x و y آنها در این معادله صدق میکنند همان مکان M است که در معادله برداری $\vec{a} \wedge \vec{OM} = w$ صدق کند \vec{a} را بردار یک عمود مستقیم بصفحه میگیریم و یا میتوان گفت که معادله را بصورت برداری نوشته ایم. حال در روی $O \neq$ که عمود مستقیم به \vec{a} فرض شده است نقطه II را بر تریبی که :

$$\overline{OH} = \frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad \text{یا} \quad \overline{OH} \left| \vec{a} \right| = w$$

باشد انتخاب کرده خط (D) را موازی \vec{a} رسم میکنیم و این همان خط مطلوب است

همچنین میتوانستیم بستگی حاصل از تناسب تصاویر \vec{a} و \vec{AM} را بنویسیم :

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} \quad \text{و این همان معادله (۴) میباشد. چنانکه } p \text{ را مخالف صفر}$$

فرض کرده و ضریب زاویه خط یعنی $m = \frac{q}{p}$ را حساب کنیم می بینیم که این مقدار

مساوی $-\frac{u}{v}$ خواهد شد. معادله خط در این حال بصورت :

$$y = m x + n$$

پس از قرار دادن $n = y_0 - \frac{q}{p}x_0$ نوشته میشود .

۷۵- معادله نرمال خط مستقیم = برای آنکه دو معادله :

$$u x + v y + w = 0$$

$$u' x + v' y + w' = 0$$

نمایش يك خط مستقیم را بدهند لازم و کافی است كه ضرایب آنها باهم متناسب

باشند . یعنی : $\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v} = \frac{w'}{w}$ باشد .

اثبات : چنانکه دو معادله نمایش يك خط مستقیم را بدهند طبق طریقه اول

دو بردار :

$$\vec{n} = u \cdot \vec{i} + v \cdot \vec{j} \quad \text{و} \quad \vec{n}' = u' \cdot \vec{i} + v' \cdot \vec{j}$$

موازی بوده و از آنجا : $u' = \lambda u$ و $v' = \lambda v$ و یا : $\vec{n}' = \lambda \vec{n}$

خواهد شد . از طرفی چنانکه A نقطه از (D) باشد .

$$w = -\vec{n} \cdot \vec{OA} \quad w' = -\vec{n}' \cdot \vec{OA} = -\lambda (\vec{n} \cdot \vec{OA}) = \lambda w$$

بوده و از آنجا نتیجه میشود که u' و v' و w' حاصل ضرب u و v و w در يك ضریب λ میباشد .

وارون این قضیه واضح میباشد زیرا چنانکه تمام ضرایب يك معادله خطی را در λ ضرب کنیم ریشه های آن معادله تغییر نکرده و در نتیجه خطیکه نمایش آنرا میدهد تغییر نخواهد کرد .

چنانکه ضریب تناسب را طوری انتخاب کنیم که :

$$\vec{n}^2 = 1 \quad \text{و یا} \quad u^2 + v^2 = 1$$

باشد معادله (۱) بصورت : $\vec{n} \cdot \vec{OM} = \vec{OH}$ در آمده و چنانکه ملاحظه کنیم که :

تصاویر \vec{n} کوسینوسهای هادی میباشد صورت کارترین معادله فوق :

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha + w = 0$$

خواهد شد این معادله معادله نرمال خط نامیده شده و در این حال $\alpha = (\vec{i}, \vec{n})$ میباشد

فاصله يك نقطه از خط در این حال $x = X \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha + w$ است.

هر خط دو معادله نرمال که بزوایای α و $\alpha + \pi$ مربوطند دارا میباشد.

۷۶ - معادله قطبی خط مستقیم - چنانکه Ox را محور قطبی و (r, α) را

مختصات قطبی بردار \vec{n} و (ρ, θ) را مختصات قطبی نقطه M بگیریم هر يك از معادلات

بردارى (۱) و (۳) را میتوان بصورت قطبی نوشته و از آنجا معادله قطبی خط مستقیم

را خواهیم داشت: مثلاً معادله بردارى (۱) بصورت:

$$r \cdot \rho \cdot \cos(\theta - \alpha) = \vec{n} \cdot \vec{OA}$$

$$\rho \cdot \cos(\theta - \alpha) = p$$

و یا:

که در آن p مقدار

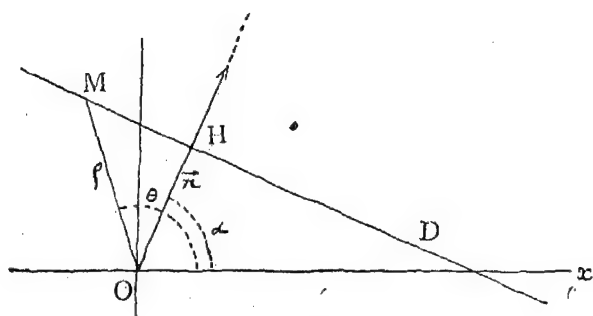
ثابتی و مساوی \overline{OH}

یعنی فاصله مبدا از

خط است نوشته میشود.

میتوان همچنین این

معادله را از تبدیل



ش ۲۸

معادله کارترین خط با استفاده از دستورهای تبدیل مختصات بدست آورد.

چنانکه این معادله را بسط دهیم بصورت: $\rho = \frac{1}{a \cos \theta + b \sin \theta}$ نیز

نوشته میشود.

۷۷ - خطوط موازی - قضیه - شرط لازم و کافی برای آنکه دو معادله:

$$ax + by + w = 0$$

$$a'x + b'y + w' = 0$$

نمایش دو خط موازی را بدهند آنستکه ضرایب x و y آنها متناسب باشند.

اثبات - برای آنکه دو خط موازی باشند لازم و کافی است که ضریب زاویه

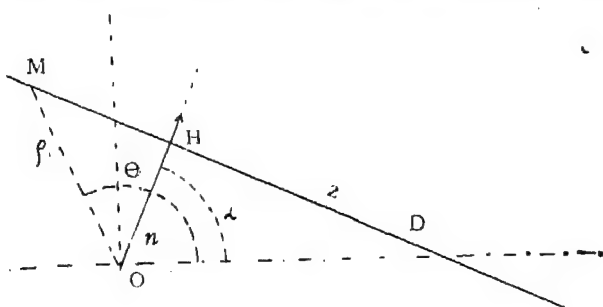
های آنها یا مساوی و یا هر دو بینهایت باشند. زیرا ضریب زاویه هر خط يك امتداد

را فقط برای آن تعیین میکند و برعکس هر امتداد فقط يك ضریب زاویه خواهد داشت

و بس. حال چنانکه دیدیم دو ضرب زاویه این دو خط بترتیب: $-\frac{u'}{v'}$ و $-\frac{u}{v}$ بوده پس شرط فوق بصورت: $\frac{u}{v} = \frac{u'}{v'}$ و یا: $\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v}$ و یا: $u' = \lambda u$ و $v' = \lambda v$ ($\lambda \neq 0$) نوشته میشود.

میتوان این شرط را بصورت: $u'x + v'y = \lambda (ux + vy)$ نیز نوشت.

تبصره ۱ - معادله $ux + vy + \kappa = 0$ که در آن κ پارامتر متغیر است معادله عمومی تمام خطوط موازی خط $ux + vy + w = 0$ میباشد زیرا نمایش خطوط موازی آن خط را داده و از طرفی κ را میتوان طوری تعیین کرد که از هر نقطه x و y صفحه نیز بگذرد. و بخصوص خط موازی خط فوق که از مبدا مختصات بگذرد



بمعادله: $ux + vy = 0$

خواهد بود. یعنی

چنین نتیجه میشود که:

برای بدست

آوردن خط موازی

خط مفروض که از مبدا،

ش ۲۹

مختصات بگذرد بایستی در معادله آن خط مقدار ثابت را صفر نمود.

تبصره ۲ - از آنچه گفته شد نتیجه میشود که برای بدست آوردن پارامترهای

هادی خط $ux + vy + w = 0$ کافی است که مختصات یک نقطه C خط $ux + vy = 0$

موازی آنرا بگیریم. مثلاً مختصات نقطه $v = -a$ و $u = +b$ و یا نقطه بمختصات

$v = +a$ و $u = -b$ در این معادله صدق کرده و از آنجا این اعداد را میتوان

پارامترهای هادی خط گرفت.

همچنین از آنجا نتیجه میشود که شرط آنکه خط (D) $ux + vy + w = 0$

موازی امتدادی پارامترهای هادی (a, b) باشد آنستکه: $ua + vb = 0$ باشد.

۷۸ - خطوط مخصوص - معادله محور x ها $y = 0$ می باشد زیرا ضریب زاویه آن صفر بوده و معادله هر خط موازی محور x ها $y = c$ می باشد.
محور y هادارای معادله $x = 0$ بوده ضریب زاویه اش بینهایت $(m = \frac{y}{x} = \frac{y}{0})$ و معادله هر خط موازی آن $x = c$ می باشد.

نیمساز اول یا نیمساز زاویه بین قسمتهای مثبت محور ها بمعادله $y = x$ و ضریب زاویه اش ۱ می باشد معادله هر خط موازی آن بصورت $y - x = c$ خواهد بود.
نیمساز دوم دارای معادله $y = -x$ و ضریب زاویه اش -۱ و معادله هر خط موازی آن $y + x = c$ خواهد بود.

۷۹ - رسم خطیکه معادله آن داده شده باشد - برای رسم هر خط داشتن دو نقطه آن کافی بوده و برای سهولت دو نقطه از آنرا که واقع روی محورها باشند مختصاتشان را حساب میکنیم نقطه واقع روی x از صفر کردن y در معادله و حل آن نسبت به x بدست می آید. و همچنین نقطه روی y از صفر کردن x در معادله بدست می آید. مثلاً اگر معادله بصورت $y = mx + n$ باشد n عرض نقطه واقع روی y بوده و آنرا عرض از مبدا نامند.

چنانکه خط از مبدا مختصات بگذرد کافی است که نقطه از آنرا پیدا نماییم یعنی يك مقدار به x داده مقدار y مربوطه را پیدا کنیم.

۸۰ - نواحی مثبت و منفی يك خط - خط (D) را فرض کرده این خط صفحه را بدو ناحیه مثبت و منفی تقسیم مینماید بر حسب آنکه مختصات یکی از نقاط این نواحی معادله را مثبت یا منفی کند آن ناحیه مثبت یا منفی خواهد بود.

همچنین باید ملاحظه کرد که چنانکه از نقطه M_0 خط (D)، بردار $\vec{M_0 M}$ را با تصاویر (u, v) مرور دهیم این بردار در ناحیه مثبت واقع خواهد شد زیرا که مختصات M بترتیب $u + x_0 + v + y_0$ بوده و چنانکه این مقادیر را بجای x و y در معادله خط نهیم:

$$(ux_0 + vy_0 + w) + (u^2 + v^2) = u^2 + v^2$$

خواهد شد پس چنانکه می بینیم نتیجه مثبت می باشد .

۸۱ - معادله پارامتری خط مستقیم - میتوان مستقیماً معادله پارامتری

خط را نوشت . فرض کنیم که خط (D) از نقطه $M_0(x_0, y_0)$ گذشته و دارای کوسینوسهای هادی (p, q) باشد . چنانکه $M(x, y)$ را یکی از نقاط غیر مشخص خط و $\vec{M_0M} = \rho$ را پارامتر بگیریم از تصویر $\vec{M_0M}$ روی محور ها بستگی های :

$$x - x_0 = \rho p \quad y - y_0 = \rho q$$

$$x = x_0 + \rho p \quad y = y_0 + \rho q \quad \text{بدست آمده و در نتیجه :}$$

خواهند شد . چنانکه p و q کوسینوسهای هادی نباشند دستور ها همان بوده و فقط در اینحال : $\rho = \frac{\vec{M_0M}}{a}$ که در آن بردار \vec{a} بتساوی (p, q) است خواهد بود . دستور

های فوق را میتوان بصورت زیر نیز نوشت :

$$x = x_0 + \rho \cos \varphi \quad y = y_0 + \rho \sin \varphi$$

در این دستور ها φ زاویه قطبی خط فرض شده است .

چنانکه خط (D) توسط دو نقطه $M_1(x_1, y_1)$ و $M_2(x_2, y_2)$ تعیین شده باشد میتوان نسبت تصاویر دو بردار $\vec{M_1M}$ و $\vec{M_2M}$ را مساوی پارامتر ρ گرفت در اینصورت معادلات پارامتری خط چنین خواهند شد :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \lambda$$

$$\text{از آنجا :} \quad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad \text{میشوند .}$$

در اینحال λ مربوط بنقاط M_1 و M_2 و بینهایت و نقطه وسط $M_1 M_2$ بترتیب $0, \infty, -1$ و $+1$ خواهند بود .

۸۲ - خط بینهایت - خطوط موهومی - معادله خط مستقیم در مختصات

همگن بصورت : $\alpha X + \beta Y + \gamma T = 0$ بوده چنانکه معادله $T = 0$ را در نظر بگیریم این معادله بهمان صورت بوده و گوئیم نمایش يك خط را میدهد . معادله اخیر

از نظر هندسه معنایی نداشته ولی از نظر تحلیلی بنا بر تعریف گوئیم نمایش يك خط را میدهد. این خط مکان نقاط بینهایت صفحه بوده و از اینجهت آنرا خط بینهایت صفحه نامند.

همچنین میتوان این خط را حد خطی دانست که نقاط برخورد آن بامحورها و در نتیجه تمام خط به بینهایت رود. ولی با وجود تمام این حالات ما این خط را نظیر خطوط معمولی صفحه فرض کرده و مثلاً گوئیم که نقاط بینهایت يك منحنی غیر مشخص نقاط برخورد آن با خط بینهایت میباشد. باید همچنین یاد آور شد که امتداد این خط غیر مشخص میباشد زیرا که ضریب زاویه آن $m = -\frac{u}{v}$ بصورت ∞ است.

خط موهومی خطی است که لااقل یکی از ضرایب معادله آن موهومی باشد. معادله آنرا میتوان بصورت $P + iQ = 0$ نوشت. Q, P توابع خطی حقیقی بوده و برای آن نتایج زیر را میتوان یاد آور شد:

- قضیه ۱- هر خط موهومی دارای يك نقطه حقیقی میباشد. این نقطه محل برخورد خطوط $P = 0$ و $Q = 0$ خواهد بود. این نقطه نیز ممکن است در بینهایت باشد.
- قضیه ۲- دو خط موهومی مزدوج در يك نقطه حقیقی برخورد میکنند.
- قضیه ۳- خطی که دو نقطه موهومی مزدوج را بهم وصل نماید حقیقی خواهد بود.

مسائل مربوط به خط مستقیم

- ۸۴- معادله خطی که از يك نقطه میگذرد. میخواهیم معادله کلی خطوطی که از نقطه $M_0(x_0, y_0)$ میگذرند بنویسیم. معادله خط را بصورت: $ux + vy + w = 0$ گرفته شرط آنکه این خط از نقطه مفروض بگذرد آنست که $ux_0 + vy_0 + w = 0$ باشد چنانکه این دو معادله را از هم کم نمائیم معادله خطی که از نقطه مفروض میگذرد خواهیم داشت: $u(x - x_0) + v(y - y_0) = 0$ معادله مطلوبست.

در این معادله v و u غیر مشخص میباشند. چنانکه ضریب زاویه را دخالت دهیم معادله بصورت: $y - y_0 = m(x - x_0)$ نوشته خواهد شد.

از آنچه که گفته شد نتیجه میشود که معادله خطیکه از نقطه M_0 عمود به امتدادی با کوسینوسهای هادی p و q باشد چنین است:

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) = 0$$

چنانکه زاویه قطبی امتداد (p, q) را دخالت دهیم معادله:

$$(x - x_0) \cos \varphi + (y - y_0) \sin \varphi = 0 \quad \text{را خواهیم داشت.}$$

و نیز معادله پارامتری خطیکه از نقطه M_0 مرور کرده و عمود بخط

$$u x + v y + w = 0 \quad \text{باشد:} \quad x = x_0 + \rho u$$

$$y = y_0 + \rho v$$

۸۴ - معادله عمومی خطوطیکه از محل برخورد دو خط میگذرند -

دسته خط - چنانکه نقطه M_0 از برخورد دو خط $P = 0$ و $Q = 0$ بدست آمده باشد محاسبه مختصات آن لزومی نداشته و میتوان مستقیماً معادله خطوط مفروض را نوشت این معادله:

$$(5) \quad P + \lambda Q = 0 \quad \text{که در آن } \lambda \text{ پارامتر متغیری است میباشد.}$$

اولاً خط $P + \lambda Q = 0$ از نقطه M_0 میگذرد زیرا که مختصات این نقطه P و Q را صفر میکنند. ثانیاً این معادله نمایش هر خط M_0 را که از نقطه M_0 بگذرد خواهد داد. زیرا اگر نقطه دیگر M_1 را روی آن انتخاب کنیم برای آنکه این خط از این نقطه بگذرد بایستی که: $P_1 + \lambda Q_1 = 0$ باشد. از اینجا λ را بدست آورده و در نتیجه معادله خط کاملاً مشخص خواهد شد و چون این خط دو نقطه مشترک با M_0 دارد پس منطبق بر آن خواهد شد.

اثبات فوق در حالیکه $Q_1 = 0$ باشد یعنی موقعی که M_0 منطبق بر Q باشد قابل قبول نبوده ولی میتوان در این حال $\lambda = 0$ گرفت.

برای از بین بردن نقص فوق میتوان معادله $P + \lambda Q = 0$ را بصورت همگن $\lambda P + \mu Q = 0$ (٦) نوشت: در این حال خط Q از قرارداد $\lambda = 0$ بدست میآید. معادله خط مطلوب در هر دو صورت چنانکه M_0 نیز در بینهایت باشد قابل قبول است و خط حاصل موازی دو خط P و Q در اینحال خواهد بود. معادلات (٥) یا (٦) را معادلات نمایش دهنده يك دسته خط نامند. نقطه M_0 را نقطه مبنای دسته نامند.

قضیه - چنانکه معادله خطی دارای پارامتری از درجه اول باشد آن خط از نقطه ثابتی خواهد گذشت.

اثبات - چنانکه معادله را نسبت به پارامتر λ مرتب کنیم معادله حاصل بصورت (٥) بوده و در نتیجه خط از نقطه ثابتی که از صفر کردن ضریب λ و مقداری که بآن بستگی ندارد بدست آمده است خواهد گذشت.

٨٥ - دسته خطوطیکه از مبدا مختصات میگذرند - قضیه - هر معادله جبری همگن از x و y از درجه m نمایش m خط مستقیم را که از مبدا مختصات میگذرند خواهد داد.

معادله $0 = f(x, y)$ را فرض کرده چنانکه آنرا بر x^m تقسیم کنیم نتیجه میشود:

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = 0$$

چنانکه قرار دهیم: $\frac{y}{x} = m$ بصورت: $0 = f(1, m)$ کردر آمده این معادله جبری و از درجه m خواهد بود پس دارای m ریشه m_1, m_2, \dots, m_m میباشد. برای آنکه مختصات يك نقطه در معادله اخیر صدق کند لازم و کافی است که در یکی از معادلات:

$$y = m_1 x, \quad y = m_2 x, \quad \dots, \quad y = m_m x$$

نیز صدق کند. حال این معادلات نمایش m خط را که از مبدا مختصات میگذرند داده و از آنجا قضیه ثابت میشود.

تبصره - قضیه بالا موقعی صادق است که خطوط موهومی مربوط بریشه های موهومی معادله نیز حساب شوند و همچنین ریشه های مکرر از مرتبه n را n خط در نظر بگیرند.

گاهی اتفاق می افتد که درجه معادله $(1, m)$ برابر اندازه q واحد کمتر میشود و این برای آنست که (x, y) فردارای x^q درفاکتر می باشد. پس معادله $f(x, y) = 0$ بازاء $x = 0$ برقرار بوده و در نتیجه دسته خط مربوطه شامل محور Oy که بایستی q دفعه حساب شود خواهد بود.

معادله $(1, m) = 0$ هر معادله ضریب زاویه های خطوط دسته بوده و برای بدست آوردن آن بایستی در معادله داده شده $x = 1$ و $y = m$ نمود.

۸۶ - دسته دو خطی که از مبدا مختصات میگذرد - چنین دسته دارای

معادله بصورت: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$ بوده. معادله ضریب

زاویه ها: $Cm^2 + 2Bm + A = 0$ خواهد شد. شرط آنکه

دو خطیکه توسط این معادله نمایش داده میشوند حقیقی باشند آنستکه $A \cdot C - B^2 \leq 0$

باشد. برای آنکه این دو خط بهم عمود باشند بایستی که حاصل ضرب ضریب زاویه

های آنها مساوی ۱ - باشد حال این حاصل ضرب مساوی $\frac{A}{C}$ و در نتیجه شرط

مزبور: $\frac{A}{C} = -1$ و یا $A + C = 0$ خواهد شد.

۸۷ - شرط آنکه سه خط متقاطع باشند - سه خط بمعادلات:

$$\begin{cases} P_1 \equiv u_1 x + v_1 y + w_1 = 0 \\ P_2 \equiv u_2 x + v_2 y + w_2 = 0 \\ P_3 \equiv u_3 x + v_3 y + w_3 = 0 \end{cases}$$

فرض کرده شرط لازم و کافی برای آنکه این سه خط متقاطع باشند آنستکه این

معادلات دارای يك رشته جواب باشند . این شرط را چنانکه درجبر ثابت میکنند :

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

میباشد . این شرط را بطریق دیگر نیز میتوان بیان نمود . بستگی $\Delta = 0$ نشان میدهد که سه معادله P_1, P_2, P_3 مستقل نبوده پس باید بتوان سه عدد $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ مخالف صفر پیدا نمود بطریقیکه :

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 \equiv 0$$

باشد . دستور فوق را بطریق دیگر نیز میتوان ثابت نمود : چون بنا بفرض خط P_3 از محل تلاقی دو خط P_1 و P_2 میگذرد پس میتوان معادله آنرا بصورت :

$$\lambda P_1 + \mu P_2 = 0 \quad \text{چنانکه قبلا دیدیم نوشت ولی این معادله و معادله } P_3 = 0$$

هر دو نمایش يك خط را داده پس $\lambda P_1 + \mu P_2 \equiv \mu P_3$ خواهد بود و این همان بستگی مطلوبست و بالعکس چنانکه بستگی :

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 \equiv 0$$

را با شرط آنکه $\lambda_3 \neq 0$ باشد داشته باشیم میتوان از آن P_3 را بدست آورده و از آنجا نتیجه میشود که این خط از محل برخورد دو خط P_1 و P_2 خواهد گذشت . نوشتن شرط فوق اغلب اوقات آسانتر از نوشتن دتر منیان ضرایب است زیرا از نظر اول ممکن است ترکیب لازم را در بعضی حالات پیدا نمود .

۸۸ - معادله خطیکه از دو نقطه میگذرد - A و B را دو نقطه بمختصات

x_1, y_1 و x_2, y_2 و M را نقطه از خط بمختصات x و y فرض میکنیم چون بنویسیم که دو بردار $\vec{AB} (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ و $\vec{AM} (x - x_1, y - y_1)$ نمایش يك امتداد را میدهند معادله خطیکه از دو نقطه میگذرد خواهیم داشت :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

۸۹ - سطح يك مثلث - مثلث $O M_1 M_2$ را كه يك رأس آن مبدا O است فرض کرده سطح آن مثبت یا منفی است بر حسب آنكه سوی OM_1 به M_2 سوی مثبت یا منفی دوران در صفحه باشد. چنانكه دیدیم مساحت این مثلث مساوی مؤلفه سوم حاصل ضرب برداری $\vec{OM_1} \wedge \vec{OM_2}$ بوده یعنی :

$$S = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - y_1 x_2) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

میباشد. حال اگر مثلث $M_0 M_1 M_2$ را در نظر بگیریم مساحت جبری آن مثبت یا منفی است بر حسب آنكه اگر متحرکی دایره محیطی آنرا در جهت $(M_0 M_1 M_2)$ بپیماید این دوران در جهت مثبت یا منفی دوران در صفحه باشد. برای محاسبه سطح آن مبدا مختصات را به M_0 میبریم نتیجه میشود :

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{و یا :}$$

چنانكه محل دو نقطه را تغییر دهیم جهت مثبت روی دایره محیطی مثلث تغییر کرده و در نتیجه علامت S تغییر خواهد کرد. ولی از طرفی نیز میدانیم كه چنانكه محل دو خط يك دتر منیان را عوض کنیم علامت آن نیز تغییر خواهد کرد.

۹۰ - گوشه بین دو خط - گوشه دو خط (D, D') بمعادلات :

$$(D) \quad ux + vy + w = 0 \quad \text{و} \quad (D') \quad u'x + v'y + w' = 0$$

مساوی گوشه امتداد های (u, v) و (u', v') عمود بر آن دو خط است و از آنجا چنانكه سابقاً گفتیم :

$$tg(D, D') = \frac{uv' - v u'}{u u' + v v'}$$

و بخصوص شرط عمود بودن دو خط : $u u' + v v' = 0$ میباشد.

بخش هشتم

صفحه و خط در فضا

۱ - صفحه

۹۱ - معادله صفحه - سه محور مختصات قائم Ox و Oy و Oz و سه بردار یکه \vec{x} و \vec{y} و \vec{z} بترتیب روی آنها فرض کرده x و y و z را مختصات نقطه M میگیریم. قضیه زیر را برای يك صفحه در فضا نظیر قضیه خط در صفحه ثابت میکنیم:

قضیه - هر صفحه (P) توسط يك معادله خطی از x و y و z بصورت:

$$ux + vy + wz + s = 0$$

نمایش داده شده و برعکس هر معادله خطی از x و y و z که باینصورت باشد نمایش يك صفحه را خواهد داد.

اثبات - فرض کنیم که صفحه (P) از نقطه A بمختصات x_0 و y_0 و z_0 گذشته و عمود به بردار \vec{n} که تصاویر آن u و v و w اند باشد.

شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه M روی (P) واقع باشد آنستکه بردار \vec{OM} در بستگی برداری:

$$\vec{n} \cdot \vec{OM} = \vec{n} \cdot \vec{OA} \quad (۱) \quad \text{صدق کند. چنانکه این}$$

شرط را بصورت کارتزین بنویسیم. معادله حاصل:

$$(۲) \quad ux + vy + wz + s = 0$$

خواهد شد زیرا که:

$$\vec{n} \cdot \vec{OM} = ux + vy + wz$$

بوده و بر حسب قرار داد

$$\vec{n} \cdot \vec{OA} = ux_0 + vy_0 + wz_0$$

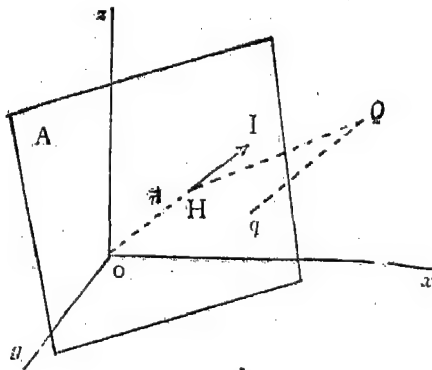
را مساوی s - گرفته ایم.

و برعکس معادله درجه اول: $ux + vy + wz + s = 0$ که در آن یکی از مقادیر u و v و w مخالف صفر فرض شده است در نظر میگیریم. بردار \vec{n} را بتصاویر (u, v, w) گرفته معادله فوق را بصورت برداری:

$$\vec{n} \cdot \vec{OM} + s = 0$$

مینویسیم. حال گوئیم مکان نقاط M که مختصات (x, y, z) آنها در معادله مفروض صدق

میکنند همان مکان نقاطی خواهد بود که در معادله برداری فوق صدق میکنند. چنانکه



ش ۳۰

بر روی برداری بردار \vec{n} که از مبدأ،

مختصات گذرانده ایم نقطه H را

بطوریکه : $\vec{OH} \cdot \vec{n} = -s$ باشد

انتخاب کنیم و از این نقطه صفحه (P)

را عمود به \vec{n} مرور دهیم این صفحه

مکان مطلوب خواهد بود. زیرا که

هر نقطه آن در رابطه برداری

$\vec{OM} \cdot \vec{n} = \vec{OH} \cdot \vec{n}$ صدق میکند.

اثبات قضیه فوق نظیر اثبات قضیه خط در صفحه بطریق حاصل ضرب داخلی میباشد.

۹۲ - فاصله یک نقطه از صفحه - چنانکه X، Y، Z را مختصات نقطه Q از

فضا بگیریم و q را تصویر Q روی صفحه (P) فرض کنیم. بستگی زیر را میتوانیم

بنویسیم :

$$uX + vY + wZ + s = \vec{n} \cdot \vec{OQ} - \vec{n} \cdot \vec{OH} = \vec{n} \cdot \vec{HQ}$$

و از آنجا چنانکه ملاحظه کنیم که \vec{HQ} تصویر \vec{OQ} روی \vec{n} میباشد فاصله

نقطه Q از صفحه (P) را خواهیم داشت :

$$qQ = \frac{uX + vY + wZ + s}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

سوی مثبت اندازه گیری این فاصله همان سوی مثبت \vec{n} یعنی از طرف صفحه

بطرف نقطه خواهد بود.

۹۳ - معادله نرمال يك صفحه - برای آنکه دو معادله :

$$ux + vy + wz + s = 0$$

$$u'x + v'y + w'z + s' = 0$$

نمایش يك صفحه را بدهند لازم و کافی است که ضرایب آنها با هم متناسب باشند :

$$\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v} = \frac{w'}{w} = \frac{s'}{s} \quad \text{یعنی : باشد}$$

اثبات این قضیه شبیه بااثبات قضیه نظیر آن در مورد خط در صفحه است و ما از تکرار آن خود داری میکنیم.

معادله نرمال يك صفحه معادله ایست که در آن : $\vec{r} = 1$
و یا آنکه : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ باشد.

در این حال x و y و z کوسینوسهای هادی عمودی بر صفحه بوده ولی در اینجا نمیتوان آنها را بر حسب يك زاویه بیان نمود بلکه مثلاً چنانکه زوایای قطبی بکار بریم این مقادیر را میتوان بترتیب $\sin \theta \cos \varphi$ و $\sin \theta \sin \varphi$ و $\cos \theta$ گرفت. پس از آنچه که گفتیم نتیجه میشود که در حالت کلی قائم صفحه (P') دارای پارامترهای هادی x و y و z میباشد کوسینوسهای هادی مربوطه را میتوان مقادیر

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

گرفت. بدین ترتیب خط قائم مربوطه همسوی بردار (x, y, z) راستدار شده و از آنجا صفحه (P) نیز راستدار خواهد شد.

۹۴ - گوشه دو صفحه - گوشه دو صفحه راستدار (P) و (P') همان گوشه بین قائمهای مربوطشان بوده و در نتیجه :

$$\cos V = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

میباشد. شرط عمود بودن دو صفحه : $xx' + yy' + zz' = 0$ خواهد بود.
تبصره - معادله $ax + by + cz + h = 0$ که در آن x و y و z مقادیر ثابت و h پارامتری میباشد نمایش کایه صفحات موازی صفحه $ax + by + cz = 0$ را خواهد داد زیرا که تمام آنها عمود به امتداد ثابت (a, b, c) میباشند. صفحه اخیر از مبداء مختصات نیز گذشته زیرا که مختصات $x = 0$ و $y = 0$ و $z = 0$ در آن صدق میکنند. از آنجا نتیجه میشود که :

چنانکه در معادله صفحه مقدار ثابت را حذف کنیم معادله حاصل نمایش

صفحه که موازی همان صفحه و از مبدا مختصات نیز میگذرد خواهد داد.
از آنجا شرط موازی بودن دو صفحه نیز نتیجه میشود و آن :

$$\frac{u}{u'} = \frac{v}{v'} = \frac{w}{w'} \text{ میباشد.}$$

شرط آنکه صفحه (P) موازی امتدادی با پارامترهای هادی (a, b, c) باشد آنستکه : $ua + vb + wc = 0$ باشد زیرا که این بستگی بمانشان میدهد که صفحه $ux + vy + wz = 0$ از نقطه (a, b, c) گذشته و در نتیجه محتوی امتداد (a, b, c) که از مبدا مختصات گذشته است میباشد.

۹۵- نواحی مثبت و منفی يك صفحه - بهمان ترتیب که در مورد خط در صفحه یاد آور شدیم ناحیه مثبت هر صفحه ناحیه ایست که علامت : $ux + vy + wz + s$ بازاء هر نقطه آن مثبت و ناحیه دیگر ناحیه منفی خواهد بود.

معادله صفحه که از سه نقطه A و B و C واقع روی محورهای مختصات گذشته باشد بطوریکه : $OA = a$ و $OB = b$ و $OC = c$ باشند :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0 \text{ خواهد بود.}$$

۹۶- صفحات مخصوص - چنانکه در معادله فوق c را بینهایت کنیم معادله حاصل دارای z نبوده و نمایش صفحه موازی محور Ox را خواهد داد یعنی هر معادله درجه اول از x و y نمایش يك صفحه موازی Ox را در فضا خواهد داد. و بهمین ترتیب است برای صفحات موازی محورهای دیگر.

صفحات مختصات و صفحات نیمساز آنها دارای معادلات :

$$x \pm y = 0, \quad z \pm x = 0, \quad y \pm z = 0, \quad z = 0, \quad y = 0, \quad x = 0 \text{ میباشند.}$$

۹۷- صفحه بینهایت - صفحات موهومی - معادله هر صفحه در مختصات

$$uX + vY + wZ + sT = 0 \text{ بوده معادله : } T = 0 \text{ نیز}$$

بهمین صورت میباشد. پس از آن با وجود آنکه از لحاظ هندسی مفهومی ندارد گوئیم این معادله نمایش صفحه را میدهد و بهمان دلایل که در مورد خط در صفحه

یاد آور شدیم گوئیم نمایش صفحه بینهایت و یا مکان نقاط بینهایت فضا و یا حد صفحه که نقاط برخورد آن با محور ها به بینهایت بروند خواهد داد.
بهمان ترتیب گوئیم نقاط بینهایت هر منحنی فضائی نقاط برخورد آن با صفحه بینهایت میباشد.

و همچنین نقاط بینهایت هر صفحه خطی خواهد بود که از برخورد آن صفحه با صفحه بینهایت $T = 0$ بدست میآید این خط را خط بینهایت صفحه نامند.

هر صفحه موهومی معادله بصورت: $P + iQ = 0$ که در آن P و Q توابع خطی حقیقی هستند خواهد داشت.

از آنجا نتیجه میشود که هر صفحه موهومی شامل يك خط حقیقی خواهد بود و آن خط از برخورد: $Q = 0$ بدست میآید. و همچنین دو صفحه موهومی مزدوج دارای خط حقیقی مشترك فوق میباشد.

۹۸ - صفحاتیکه از يك نقطه ثابت میگذرند - معادله عمومی صفحاتیکه از نقطه ثابت $M_0 (x_0, y_0, z_0)$ میگذرند:

$$u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0) = 0$$

میباشد. اثبات این بستگی ساده و شبیه باثبات دستور نظیر آن در مورد خط در صفحه است.

چنانکه (a, b, c) کوسینوسهای هادی امتدادی باشند صفحه که از نقطه M_0 عمود بآن مرور داده شده باشد بمعادله: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ خواهد بود.

چنانکه نقطه M_0 از برخورد سه صفحه بمعادلات: $P = 0$ $Q = 0$ $R = 0$ بدست آمده باشد معادله مطلوب در اینحال: $\lambda P + \mu Q + \nu R = 0$ (۳)
که در آن λ, μ, ν غیر مشخص اند خواهد بود. اثبات آن شبیه باثبات قضیه مربوطه در مورد خط در صفحه میباشد.

صفحات (۳) را شبکه صفحه نامیده و نقطه M_0 را مبنای شبکه گویند.

۹۹- شرط آنکه چهار صفحه متقاطع باشند - شرط آنکه چهار صفحه

$$P_1 \equiv u_1 x + v_1 y + w_1 z + s_1 = 0 \quad \text{بمعادلات:}$$

$$P_2 \equiv u_2 x + v_2 y + w_2 z + s_2 = 0$$

$$P_3 \equiv u_3 x + v_3 y + w_3 z + s_3 = 0$$

$$P_4 \equiv u_4 x + v_4 y + w_4 z + s_4 = 0$$

دارای نقطه مشترك باشند آنستکه: $\|u_i \ v_i \ w_i \ s_i\| = 0$ باشد.

این نقطه مشترك ممكن است در فاصله نزدیک و یا در بینهایت باشد. این شرط

را ممكن است بصورت: $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 \equiv 0$ نیز نوشت.

۱۰۰- صفحاتیکه از خط ثابتی میگذرند - خط مفروض را فصل مشترك

دو صفحه: $P = 0$ $Q = 0$ گرفته چنانکه مانند حالت خط در صفحه

استدلال کنیم نتیجه میگیریم که معادله کلی صفحات مزبور: $P + \lambda Q = 0$ (۴)

و یا: $\lambda P + \mu Q = 0$ (۵) میباشد.

صفحات (۴) و (۵) را دسته صفحه و خط ثابت را خط مبنای دسته نامند.

شرط آنکه سه صفحه دارای خط مشترك باشند - شرط لازم و کافی برای

آنکه سه صفحه دارای يك خط مشترك باشند آنستکه بتوان سه عدد $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

پیدا نمود بطوریکه هر سه با هم صفر نبوده و در بستگی:

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 \equiv 0$$

صدق کنند. اثبات این قضیه شبیه با اثبات قضیه شماره ۸۷ بخش قبل میباشد.

۱۰۱- معادله صفحه ایکه از سه نقطه میگذرد - سه نقطه بمختصات همگن

$M_1 (X_1, Y_1, Z_1, T_1)$ و $M_2 (X_2, Y_2, Z_2, T_2)$ و $M_3 (X_3, Y_3, Z_3, T_3)$

فرض کرده معادله صفحه را بصورت همگن: $uX + vY + wZ + sT = 0$

نیز میگیریم.

چون صفحه مزبور بر سه نقطه فوق میگذرد پس مختصات آنها در معادله

صفحه صدق کرده و از آنجا:

$$uX_1 + vY_1 + wZ_1 + sT_1 = 0$$

$$u X_1 + v Y_1 + w Z_1 + s T_1 = 0$$

$$u X_2 + v Y_2 + w Z_2 + s T_2 = 0$$

میباشند چنانکه u, v, w, s را بین این چهار معادله حذف کنیم دترمینان حاصل معادله صفحه که بر سه نقطه میگذرد خواهد بود :

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & T \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & T_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & T_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & T_3 \end{vmatrix} = 0$$

چنانکه مختصات کراترین معمولی نقاط در دست باشند معادله بالا بصورت :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

نوشته خواهد شد. چنانکه یکی از نقاط در بینهایت واقع باشد کافی است که T مربوط بآن را در معادله بالا صفر کنیم. و بهمین طریق نتیجه میگیریم که معادله صفحه که از نقطه M_1 گذشته و موازی امتداد های (a, b, c) و (a', b', c') باشد.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ a & b & c & 0 \\ a' & b' & c' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

خواهد بود. این دترمینان را بصورت :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0$$

نیز میتوان نوشت.

۱۰۳ - سطح مثلث فضائی - چنانکه A سطح محصور در منحنی سطح

(C) واقع در فضا و A' تصویر این سطح روی صفحه باشد بستگی :

$$A' = A \cos \varphi$$

که در آن φ گوشه بین دو صفحه A و A' است برقرار می باشد. زاویه φ را نیز ممکن است زاویه بین دو قائم مستقیم بر صفحات گرفت. چنانکه a, b, c را کوسینوسهای هادی خط قائم صفحه راستدار (S) و S_x و S_y و S_z را تصاویر سطح S روی صفحات مختصات بگیریم بستگی های:

$$S_x = S \cdot a \quad S_y = S \cdot b \quad S_z = S \cdot c$$

برقرار بوده و چنانکه آنها را بقوه دو رسانده و باهم جمع کنیم. دستور کلی:

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = S^2 (a^2 + b^2 + c^2) = S^2$$

را خواهیم داشت. در مورد يك مثلث فضائی A_1, A_2, A_3 طبق شماره ۸۹ چنین خواهیم داشت:

$$S_x = \frac{1}{V} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \quad S_y = -\frac{1}{V} \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$S_z = \frac{1}{V} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

۱۰۲ - حجم چهار وجهی - حجم هر چهار وجهی یا هرم مثلث القاعده يك سوم حجم منشور مثلث القاعده ایست که بهمان قاعده و ارتفاع باشد حجم هر منشور مثلث القاعده نصف حجم متوازی السطوحی است که از یالهای آن ساخته شود. از آنجا حجم هر چهار وجهی يك ششم حجم يك چنین متوازی السطوحی خواهد شد.

حجم متوازی السطوحی که روی سه بردار $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ساخته شود چنانکه دیدیم مساوی حاصل ضرب مختلط $(\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot \vec{a}$ بوده و اندازه جبری آن مثبت یا منفی است بر حسب آنکه سه وجهی حاصل از این سه بردار مستقیم یا معکوس باشد.

(ش ۱۵). زیرا حاصل ضرب $\vec{b} \wedge \vec{c}$ از حیث قدر مطلق مساوی سطح حاصل از این دو بردار بوده و از آنجا حاصل ضرب مختلط مساوی حاصل ضرب مساحت این متوازی الاضلاع در تصویر \vec{a} روی $\vec{b} \wedge \vec{c}$ و یا روی عمود بر صفحه این دو بردار

خواهد شد. پس مسابوی حجم متوازی السطوح از حیث قدر مطلق شده و علامت آن + یا - است بر حسب آنکه \vec{a} و $\vec{b} \wedge \vec{c}$ در یکطرف یا در دو طرف صفحه \vec{b} و \vec{c} واقع باشند. و با آنکه دو سه وجهی $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ و $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ همسو یا باسوهاى مخالف باشند. و چون سه وجهی دوم همسوی سه وجهی مقایسه است پس نتیجه میشود که سه وجهی $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ نیز باید همسوی سه وجهی مقایسه باشد تا آنکه حجم مثبت شود.

چنانکه دیدیم اگر Z, Y, X تصاویر \vec{a} و Z', Y', X' تصاویر \vec{b} و Z'', Y'', X'' تصاویر \vec{c} باشند:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{vmatrix}$$

بوده و از آنجا حجم چهار وجهی (A_1, A_2, A_3, A_4) بر حسب مختصات این نقاط:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

خواهد شد. در اینجا برای آنکه حجم مثبت باشد کافی است که A_1 در ناحیه مثبت صفحه (A_2, A_3, A_4) که در سوی (A_2, A_3, A_4) راستدار شده است واقع باشد.

۲- خط در فضا

۱۰۴- معادله يك خط در فضا - هر خط (D) فضائی را میتوان مکان برخورد

دو صفحه (P) و (P') دانست و از آنجا معادله آن مجموع دو معاله:

$$(۶) \quad P \equiv u x + v y + w z + s = 0 \quad P' \equiv u' x + v' y + w' z + s' = 0$$

میشود. ولی باید یاد آور شد که انتخاب این دو معادله اختیاری است زیرا بینهایت صفحه ممکن است فرض کرد که خط مفروضی را در برداشته باشند. و بخصوص

چنانکه معادلات بالا را معادلات دو صفحه تصویر کننده خط روی صفحات مختصات بگیریم دستگامی مثلا بصورت :

$$(۷) \quad x = az + p \quad y = bz + q$$

که در آن a, b, p, q چهار مقدار ثابتند خواهیم داشت . این دو معادله معادلات صفحات تصویر کننده خط روی zOx و zOy بوده و در اینحال لازمست که خط موازی صفحه xOy نباشد . از دستور های بالا نتیجه میشود که هر خط در فضا توسط چهار پارامتر کاملا مشخص خواهد شد .

چنانکه خط موازی صفحه xOy باشد برای تعیین آن سه صفحه تصویر کننده آن را روی صفحات مختصات مینویسیم :

$$z = h \quad ux + vy + w = 0$$

معادلات خط (D_0) موازی (D) که از مبدا مختصات بگذرد از حذف مقدار ثابت در معادلات (۶) بدست میآید زیرا از برخورد دو صفحه (P_0) و (P'_0) که بموازات (P) و (P') از مبدا مختصات مرور داده ایم حاصل میشود :

$$u'x + v'y + w'z = 0 \quad ux + vy + wz = 0$$

این معادلات را میتوان بصورت :

$$\frac{x}{v'w' - wv} = \frac{y}{w'u' - u'w} = \frac{z}{u'v' - v'u}$$

نیز نوشت و از آنجا نتیجه میشود که میتوان مقادیر $(v'w' - wv)$ و $(w'u' - u'w)$ و $(u'v' - v'u)$ را پارامترهای هادی خط (D_0) و یا (D) گرفت .

۱۰۵- معادلات پارامتری خط در فضا - حالت اول - خط توسط يك نقطه و امتدادش تعیین گشته است .

فرض کنیم که خط (D) از نقطه $M_0(x_0, y_0, z_0)$ گذشته و دارای پارامترهای هادی (a, b, c) باشد . مختصات یکی از نقاط آنرا $M(x, y, z)$ فرض کرده چنانکه نسبت تصاویر دو بردار $\vec{M_0M}$ و (a, b, c) را بنویسیم معادلات خط در فضا را

$$(A) \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad \text{خواهیم داشت :}$$

چنانکه نسبت فوق را مساوی ρ قرار دهیم معادلات پارامتری خط را بدست خواهیم آورد :

$$x = x_0 + \rho a \quad y = y_0 + \rho b \quad z = z_0 + \rho c$$

در این معادلات اگر a, b, c کوسینوسهای هادی باشند $M_0 M = \rho$ بوده و گرنه نمایش مقداری متناسب آنرا خواهد داد.

حالت دوم - خط توسط دو نقطه تعیین گشته است : دو نقطه بمختصات $M_1(x_1, y_1, z_1)$ و $M_2(x_2, y_2, z_2)$ فرض کرده معادلات خطی که بر این دو نقطه بگذرد از قرار دادن :

$$a = x_2 - x_1, \quad b = y_2 - y_1, \quad c = z_2 - z_1$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad \text{در معادلات فوق بدست آمده یعنی :}$$

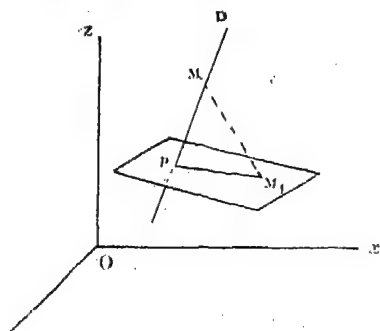
را خواهیم داشت . چنانکه $\frac{MM_1}{MM_2} = -\lambda$ * قرار دهیم دستگاه :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

را خواهیم داشت .

۱۰۶ - فاصله يك نقطه از يك خط - فرض كنیم كه خط از نقطه $M_0(x_0, y_0, z_0)$ گذشته و دارای پارامترهای هادی (a, b, c) باشد .

میخواهیم فاصله نقطه $M_1(x_1, y_1, z_1)$ را از این خط پیدا نماییم . بدین منظور



نقطه P را که از برخورد عمود وارد از نقطه M_1 بخط مزبور بدست آمده است در نظر میگیریم . در مثلث قائم $M_0 P M_1$:

$$M_1 P^2 = M_0 M_1^2 - M_0 P^2$$

بوده خال :

$$M_0 M_1^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2$$

$$+ (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2$$

و از طرفی فاصله نقطه M_0 تا صفحه

عمود به خط (D) که از نقطه M_1 گذشته است میباشد این فاصله :

$$PM_1 = \frac{a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

بوده و در نتیجه پس از قرار دادن این مقادیر در بستگی فوق و استفاده از رابطه لاگرانژ مجذور فاصله مطلوب :

$$d^2 = \frac{[b(y_0 - z_1) - c(y_0 - y_1)]^2 + [c(x_0 - x_1) - a(z_0 - z_1)]^2 + [a(y_0 - y_1) - b(x_0 - x_1)]^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

خواهد شد .

بخش هفتم

دایره

۱۰۷ - معادله دایره - دایره (C) را بمرکز $C(\alpha, \beta)$ و شعاع R فرض

کرده برای آنکه نقطه $M(x, y)$ واقع روی آن باشد لازم و کافیهست که $CM^2 = R^2$

$$(1) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - R^2 = 0$$

که معادله دایره در مختصات قائم است بدست میآید .

چنانکه معادله (۱) را بسط دهیم بستگی :

$$(2) \quad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0 \quad \text{که در آن } \gamma = \alpha^2 + \beta^2 - R^2$$

قرار داده شده است خواهیم داشت .

و برعکس گوئیم هر معادله که بصورت (۲) باشد نمایش يك دایره در صفحه را

خواهد داد زیرا چنانکه : $R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma$ بگیریم معادله داده شده

بصورت (۱) در خواهد آمد و این معادله نمایش يك دایره بمرکز (α, β) و شعاع R

را میدهد .

شرط آنکه این دایره حقیقی باشد آنستکه : $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma > 0$ باشد .

چنانکه $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma < 0$ باشد شعاع دایره موهومی بوده معادله (۲) بازاء هیچ نقطه حقیقی صدق نکرده دایره در اینحال موهومی میباشد.

و چنانچه $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma = 0$ باشد شعاع دایره صفر بوده معادله دایره در اینحال :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = 0$$

و یا : $y - \beta = \pm i(x - \alpha)$ خواهد شد. گویند این معادله نمایش دو خط موهومی مزدوج را که از يك نقطه حقیقی میگذرند میدهد. این دایره را دایره شعاع صفر نیز نامند.

۱۰۸ - چنانکه دیدیم معادله هر دایره از درجه دوم بوده شرط آنکه معادله کامل درجه دوم $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ (۳)

نمایش يك دایره را بدهد آنستکه $A = C$ و $B = 0$ باشند زیرا در اینحال

معادله (۳) بصورت : $A(x^2 + y^2) + 2Dx + 2Ey + F = 0$ (۴) در آمده و این معادله پس از تقسیم بر A بصورت (۲) نوشته شده و نمایش يك دایره را خواهد داد.

و برعکس چنانکه معادله (۴) داده شده باشد میتوان آنرا بترتیب بصورت :

$$x^2 + y^2 + \frac{2D}{A}x + \frac{2E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

$$\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - AF}{A^2} \quad \text{و یا :}$$

که نمایش يك دایره بمرکز $-\frac{D}{A}$ و $-\frac{E}{A}$ و شعاع $R = \frac{D^2 + E^2 - AF}{A^2}$ را میدهد نوشت.

۱۰۹ - معادله پارامتری دایره - چنانکه موقعیت نقطه M را روی دایره

بر حسب زاویه φ بردار \vec{CM} تعیین کنیم معادلات پارامتری دایره بصورت :

$$(5) \quad x = \alpha + R \cos \varphi \quad y = \beta + R \sin \varphi$$

نوشته میشوند.

مماس بر دایره - خط مماس MT بر دایره در نقطه M که با مختصات فوق

داده شده باشد، عمود به \vec{CM} بوده و پارامترهای هادی آن :

$$R \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) = R \cos \varphi \quad \text{و} \quad R \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) = -R \sin \varphi$$

میباشند. پس میتوان مقادیر $(\cos \varphi$ و $-\sin \varphi)$ را کوسینوسهای هادی نیم مماس مثبت گرفته و معادله مماس را بدینصورت نوشت :

$$\frac{x - \alpha - R \cos \varphi}{-\sin \varphi} = \frac{y - \beta - R \sin \varphi}{\cos \varphi}$$

$$(x - \alpha) \cos \varphi + (y - \beta) \sin \varphi - R = 0 \quad \text{و یا :}$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - R^2 = 0 \quad \text{چنانکه معادله دایره بصورت :}$$

داده شده باشد باسانی میتوان دید که معادله مماس در نقطه $M(x_0, y_0)$

$$(x - x_0)(x_0 - \alpha) + (y - y_0)(y_0 - \beta) = 0 \quad \text{و یا :} \quad y - y_0 = -\frac{x_0 - \alpha}{y_0 - \beta} (x - x_0)$$

خواهد شد. این دستور را بصورت دیگر نیز میتوان نوشت بدین منظور طرفین آنرا

$$\text{با رابطه :} \quad (x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 - R^2 = 0 \quad \text{جمع کرده و فرمول :}$$

$$(6) \quad (x_0 - \alpha)(x - \alpha) + (y_0 - \beta)(y - \beta) - R^2 = 0$$

را جهت مماس بر دایره بدست خواهیم آورد.

۱۱۰- قوت نقطه نسبت بدایره - قضیه - دایره (C) بمعادله :

$$(2) \quad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0 \quad \text{و نقطه } P(x_0, y_0) \text{ را در صفحه}$$

آن فرض کرده قاطع $P\lambda$ این دایره را در نقاط M, M' قطع مینماید حاصل ضرب :

$$PM \cdot PM' = p \quad \text{بستگی بقاطع نداشته و دارای مقداری ثابت میباشد.}$$

اثبات - کوسینوسهای هادی $P\lambda$ را (α, β) گرفته معادله پارامتری این

$$\text{قاطع} \quad x = x_0 + \rho \alpha \quad \text{و} \quad y = y_0 + \rho \beta \quad \text{میباشند مقادیر } \rho \text{ مربوط بنقاط}$$

$$\text{برخورد خط ودایره ازحل معادله :} \quad f(x_0 + \rho \alpha, y_0 + \rho \beta) = 0 \quad \text{که در آن}$$

$$f(x, y) \text{ طرف اول معادله (2) میباشد بدست آمده ریشه های این معادله درجه دوم}$$

برحسب ρ مقادیر PM و PM' خواهند بود.

برای بدست آوردن حاصل ضرب این ریشه ها بایستی ضریب ρ^2 و مقداریکه

به p بستگی ندارد پیدا کنیم. پس از بسط معادله فوق با آسانی دیده میشود که ضریب p^2 يك بوده و $p = f(x_0, y_0)$ خواهد شد. و چنانکه دیده میشود این مقدار بستگی بکوسینوسهای هادی (α, β) نداشته و قوت نقطه P نسبت بدایره نامیده میشود. از آنجا دستور زیر را جهت قوت نقطه خواهیم داشت:

دستور - برای بدست آوردن قوت نقطه نسبت بدایره باید در معادله دایره که تمام آن در یکطرف نوشته شده و ضریب x^2 و y^2 آن يك باشد مختصات آن نقطه را بجای مختصات جاری معادله قرار داد.

۱۱۱ - محور اصلی دو دایره - دو دایره

$$(۷) \quad C \equiv x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$$

$$(۸) \quad C' \equiv x^2 + y^2 - 2\alpha' x - 2\beta' y + \gamma' = 0$$

فرض کرده مکان نقاطیکه دارای يك قوت نسبت باین دو دایره باشند دارای معادله:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = x^2 + y^2 - 2\alpha' x - 2\beta' y + \gamma'$$

$$2(\alpha' - \alpha)x + 2(\beta' - \beta)y + \gamma - \gamma' = 0 \quad \text{و یا:}$$

که معادله يك خط است بوده و با آسانی دیده میشود که این خط عمود بامتداد: $2(\alpha' - \alpha)$ و $2(\beta' - \beta)$ یعنی عمود به خط مرکزهای دو دایره میباشد. این خط از نقاط برخورد دو دایره نیز گذشته زیرا که مختصات این نقاط از حل دستگاه فوق بدست میآیند. این خط را محور اصلی دو دایره نامند.

چنانکه دایره دیگر $C'' = 0$ را فرض کنیم محورهای اصلی این سه دایره دو بدو دارای معادلات:

$$C - C' = 0 \quad C' - C'' = 0 \quad C'' - C = 0$$

بوده چنانکه طرف اول این معادلات را با هم جمع کنیم نتیجه صفر میشود و از آنجا همانطور که در شماره (۸۷) گفتیم این سه خط از يك نقطه گذشته و این نقطه را مرکز اصلی سه دایره نامند.

۱۱۲ - گوشه دو دایره - گوشه دو دایره گوشه بین مماسهای یکی از نقاط

برخوردشان میباشد. اگر در مثلث OMO' بستگی :

$$\overline{OO'}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{O'M}^2 - 2 OM \cdot O'M \cdot \cos \angle OMO'$$

را بنویسیم و d را فاصله OO' بگیریم :

$$\cos V = \frac{R^2 + R'^2 - d^2}{2 R R'}$$

خواهد شد. چنانکه معادلات دو دایره را بصورت (γ) و (λ) داشته باشیم :

$$R^2 + R'^2 - d^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma + \alpha'^2 + \beta'^2 - \gamma' - (\alpha - \alpha')^2 - (\beta - \beta')^2$$

$$= 2 \alpha \alpha' + 2 \beta \beta' - \gamma - \gamma'$$

شده و از آنجا :

$$\cos V = \frac{2 \alpha \alpha' + 2 \beta \beta' - \gamma - \gamma'}{2 R R'}$$

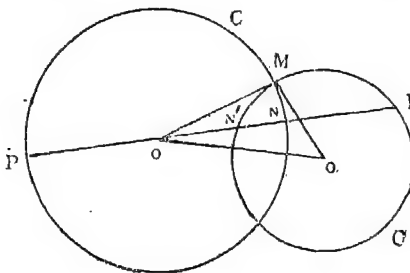
خواهد شد.

۱۱۳ - دوائر عمود بهم - دو دایره وقتی بهم عمودند که زاویه بینشان قائم

باشد و از آنجا لازم میآید که : $\cos V = 0$ و یا : $d^2 = R^2 + R'^2$ باشد.

در اینحال شعاع OM عمود به (C') و همچنین شعاع $O'M$ عمود به (C) خواهند بود. قوت نقطه O نسبت به (C') نیز R^2 خواهد شد.

قضیه - اگر دو دایره عمود بهم باشند قطر غیر مشخص هر کدام از آنها دایره دیگر را در دو نقطه که با دوسر قطر تشکیل يك بخش توافقی را میدهند قطع مینماید.



زیرا چنانکه (C) و (C')

برهم عمود باشند.

$$\overline{ON'} \cdot \overline{OP'} = R^2 = \overline{ON}^2 = \overline{OP}^2$$

بوده و از آنجا P و N مزدوج توافقی

نقاط N' و P' میباشند و برعکس

اگر P و N مزدوج توافقی نقاط

ش ۳۲

N' و P' باشند بستگی بالا برقرار بوده و دو دایره برهم عمودند.

اگر دوائر (C) و (C') بر حسب معادلات (γ) و (λ) داده شده باشند شرط

$$\text{عمود بودنشان : } 2 \alpha \alpha' + 2 \beta \beta' = \gamma + \gamma' \quad \text{خواهد بود.}$$

۱۱۴ - نقاط سیکلیك - خطوط ایز قَرپ - معادله دایره را بصورت (γ) فرض

کرده محل برخورد آن با خط بینهایت از نوشتن معادله بصورت همگن و بعد از $T=0$ کردن در آن بدست میآیند. معادله حاصل: $X^2 + Y^2 = 0$ که بدو معادله:

$$Y = \epsilon X \quad \text{و} \quad Y = -\epsilon X$$

تجزیه پذیر است نوشته میشود. از آنجا نتیجه میشود که مختصات همگن نقاط بینهایت دایره $(1, \epsilon, 0)$ و $(1, -\epsilon, 0)$ شده و دیده میشود که این مختصات

بستگی بضایب α ، β و γ ندارند. پس نقاط بینهایت تمام دوایر صفحه یکی میباشند. این نقاط که موهومی مزدوج اند بنقاط سیکلیک یا نقاط بینهایت دایره موسومند.

خط ایزترب خطی است که بر یکی از نقاط سیکلیک مرور نماید. بدین ترتیب هر خط ایزترب دارای ضریب زاویه ϵ یا $-\epsilon$ خواهد بود.

از هر نقطه صفحه دو خط ایزترب میگذرد. این خطوط چنانچه این نقطه حقیقی باشد موهومی مزدوج خواهند بود.



بخش هشتم

کره

۹۱۵ - معادله کره - بنا بتعریف کره مکان تقاطعی است که از يك نقطه

$C(\alpha, \beta, \gamma)$ موسوم بمرکز يك فاصله باشند. پس معادله هر کره (S) شعاع R

$$(۱) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2 \quad \text{در مختصات قائم:}$$

بوده چنانچه این معادله را بشط دهیم معادله حاصل بصورت:

$$(۲) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0$$

که در آن: $\delta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2$ است نوشته میشود. و برعکس هر

معادله که بصورت (۲) باشد يك کره که مرکز آن (α, β, γ) و شعاع آن:

$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta$$

است نمایش میدهد. این شعاع نیز ممکن است حقیقی، موهومی و یا صفر باشد

در حالت اخیر گویند معادله نمایش کره شعاع صفر را میدهد. چنین کره را ممکن

است يك نقطه حقیقی و یا يك مخروط موهومی برآس C فرض نمود. قاعده این مخروط

دایره موهومی بینهایت میباشد.

۹۱۶ - قضیه - شرط لازم و کافی برای آنکه معادله کامل درجه دوم:

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2B'yz + 2B''zx + 2Dx + 2D'y + 2D''z + F = 0$$

نمایش يك کره را بدهد آنستکه:

$$A = A' = A'' \quad \text{و} \quad B = B' = B'' = 0 \quad \text{باشند:}$$

اثبات این قضیه شبیه بااثبات قضیه مربوطه در مورد دایره در صفحه است و از

تکرار آن خود داری میشود.

۱۱۷ - معادله پارامتری کره - چنانکه برای تعیین موقعیت نقطه M واقع روی کره (S) بمرکز C زوایای قطبی θ و φ بردار \vec{CM} را بکار ببریم معادله پارامتری کره را خواهیم داشت :

$$(۲) \quad x = \alpha + R \sin \theta \cos \varphi \quad y = \beta + R \sin \theta \sin \varphi \quad z = \gamma + R \cos \theta$$

۱۱۸ - صفحه مماس بر کره - معادله کره را بصورت (۲) فرض کرده نقطه $Q(x, y, z)$ را روی آن میگیریم. مختصات نقطه غیر مشخص خطیکه از این نقطه

گذشته باشد : $X = x + \alpha r \quad Y = y + \beta r \quad Z = z + \gamma r$ که در آن (α, β, γ) کوسینوسهای هادی آن میباشدند خواهند بود. مقادیر r مربوط بنقاط برخورد این خط و کره از قراردادن مقادیر فوق در معادله (۲) بدست آمده یکی از آنها : $r_1 = 0$ و دیگری

$$r_2 = -2[\alpha(x - \alpha) + \beta(y - \beta) + \gamma(z - \gamma)]$$

خواهد بود. چنانکه r_2 را مساوی صفر فرض کرده یعنی خط مزبور را مماس بر کره بگیریم شرط آنکه خطی از نقطه Q گذشته و مماس بر کره باشد خواهیم داشت. این شرط : $\alpha(x - \alpha) + \beta(y - \beta) + \gamma(z - \gamma) = 0$ بوده و از بررسی آن نتیجه میشود که امتداد (α, β, γ) که مماس بر کره است عمود بامتداد $(x - \alpha, y - \beta, z - \gamma)$ که امتداد شعاع کره است خواهد بود. پس از آنجا نتیجه میشود که هر خط مماس بر کره در نقطه Q در صفحه که صفحه مماس بر کره در نقطه Q نامیده میشود واقع بوده و معادله این صفحه بآسانی نیز نوشته میشود و آن چنانکه X, Y, Z را نقطه از آن صفحه فرض کنیم :

$$(۴) \quad (X - x)(x - \alpha) + (Y - y)(y - \beta) + (Z - z)(z - \gamma) = 0$$

خواهد بود چنانکه ملاحظه کنیم که :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0$$

است معادله (۴) بصورت :

$$(۵) \quad Xx + Yy + Zz - \alpha(X + x) - \beta(Y + y) - \gamma(Z + z) + \delta = 0$$

نیز نوشته خواهد شد.

حال فرض کنیم که صفحه (o) از نقطه ثابت $R(x', y', z')$ نیز گذشته باشد یعنی:

$$x'x + y'y + z'z - \alpha(x' + x) - \beta(y' + y) - \gamma(z' + z) + \delta = 0$$

باشد این معادله بما نشان میدهد که نقطه Q را بنوبه خود میتوان در صفحه ثابت :

$$Xx' + Yy' + Zz' - \alpha(X + x') - \beta(Y + y') - \gamma(Z + z') + \delta = 0$$

فرض نموده و از آنجا نتیجه میشود که نقاط تماس خطوط خارج از نقطه ثابت R و مماس به (S) در صفحه که بصفحه قطبی نقطه R موسوم است واقع میباشند. مکان این خطوط مماس را نیز مخروط مماس به کره نامند. البته این مخروط موقعی وجود دارد که R خارج از کره باشد.

۱۱۹ - قوت نقطه نسبت بکره - اگر نقطه Q را خارج کره فرض کرده

و خطی که از آن گذشته باشد کره را در دو نقطه P_1 و P_2 قطع نماید حاصل ضرب $QP_1 \cdot QP_2 = m$ بستگی بقاطع نداشته و مقدار آنرا قوت نقطه Q نسبت بکره نامند. بهمان ترتیب که در شماره پیش عمل کردیم این قضیه ثابت شده و نیز نتیجه میشود که :

$$m = QP_1 \cdot QP_2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2\alpha x' - 2\beta y' - 2\gamma z' + \delta$$

میباشد x', y', z' مختصات نقطه Q فرض شده اند.

صفحه اصلی دو کره بمعادلات $S = 0$ و $S' = 0$ مکان تقاطعی است که نسبت

بدو کره بیک قوت باشند معادله این صفحه $S - S' = 0$ خواهد بود. مکان تقاطیکی

نسبت بسه کره $S'' = 0$ $S' = 0$ $S = 0$ دارای يك قوتند خطی است مشترك

بین سه صفحه اصلی این سه کره که دو بدو گرفته شده باشند زیرا معادلات این سه

$$S - S' = 0 \quad S' - S'' = 0 \quad S'' - S = 0 \quad \text{صفحه :}$$

بوده و از جمع کردن طرف اول این معادلات نتیجه میشود که این سه صفحه بر خطی که نقاط آن نسبت بسه کره هم قوت هستند خواهند گذشت.

و بهمین ترتیب دیده میشود که شش صفحه اصلی چهار کره از نقطه مشترکی

که بمرکز اصلی چهار کره موسوم است میگذرند.

۱۴۰- معادله دایره در فضا - هر دایره در فضا از برخورد يك كره و يك صفحه و یا از برخورد دو كره بدست میآید و از آنجا هر دایره فضائی توسط دو معادله كه يكی از آنها از درجه دوم میباشد نمایش داده میشود .
 زاویه دو كره زاویه بین صفحات مماس آنها در یکی از نقاط برخوردشان میباشد .
 دو كره را بر هم عمود گویند وقتیكه زاویه بینشان قائمه باشد . شرط عمود بودن دو كره نظیر عمود بودن دو دایره در صفحه بصورت :

$$2(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') = \delta + \delta'$$

نوشته میشود .



بخش نهم

خط مماس - صفحه مماس

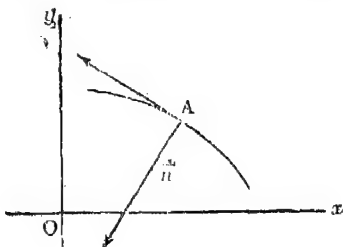
۱۲۱ - مماس منحنی مسطحه - در صفحه که در آن دو محور قائم Ox و Oy

انتخاب شده است منحنی (C) و همچنین یک رابطه بین نقطه متغیر M واقع روی آن و یک پارامتر t فرض کرده چنانکه در مورد مشتق هندسی یک بردار دیدیم بردار \vec{OM} تابعی از t بوده و از آنجا تصاویر آن (x, y) که مختصات این نقطه اند توابعی از t خواهند بود. منحنی (C) که بدین ترتیب مشخص شود چنانکه دیدیم بصورت پارامتری تعیین شده و هودوگراف بردار \vec{OM} میباشد.

تابع برداری \vec{OM} چنانکه پیش گفتیم دارای مشتق هندسی بوده و تصاویر این مشتق بترتیب $\frac{dx}{dt}$ و $\frac{dy}{dt}$ میباشند.

$$\frac{d(\vec{OM})}{dt} = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt}$$

امتداد این مشتق مماس بر (C) بوده و از آنجا مقادیر $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ و یا (x, y)



ش ۳۳

پارامترهای هادی مماس خواهند بود. نسبت این پارامترهای هادی یعنی: $\frac{dy}{dx}$ نیز ضریب زاویه مماس میباشد.

اندازه این مشتق نیز چنانکه گفتیم

مساوی ds بوده و چون تصاویر آن dx و dy

و یا مشتقات تصاویر \vec{OM} اند پس:

$$ds^2 = [d(\vec{OM})]^2 = dx^2 + dy^2$$

میباشد. اگر بجای متغیر t قوس s را متغیر بگیریم مشتق $\frac{d(\vec{OM})}{ds}$ مساوی برداریکه \vec{u} مماس شده و تصاویر آن: $\frac{dx}{ds}$ و $\frac{dy}{ds}$ کوسینوسهای هادی مماسی که در سوی قوسهای صعودی راستادار شده است خواهند بود.

چنانکه α زاویه مماسی که بدین ترتیب راستادار شده است با محور Ox باشد

$$(۱) \quad \frac{dx}{ds} = \cos \alpha \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha$$

میباشند. این خط مماس را نیم مماس مثبت نیز گویند.

پس چنانکه دیدیم معادله مماس بر (C) در نقطه $A(x, y)$ چنانکه X و Y مختصات یکی از نقاط آن باشند:

$$(۲) \quad (X - x) dy - (Y - y) dx = 0 \quad \text{خواهد بود.}$$

چنانکه معادله منحنی بصورت (۳) $y = f(x)$ باشد میتوان x را بجای t انتخاب نمود در اینحال ضریب زاویه مماس $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ شده و معادله مماس: $(Y - y) = y'(X - x)$ نوشته میشود.

۱۲۲ - مماس بر خم ها منی که معادله آن نسبت یکی از مختصاتش

حل نشده باشد - معادله منحنی را بصورت: (۴) $f(x, y) = 0$ فرض کرده چنانکه y را بر حسب x بیان کنیم معادله بصورت (۳) خواهیم داشت ضریب زاویه مماس بر این منحنی مشتق x بوده ولی همانطوریکه در جبر ثابت میشود:

$$y'_x = \frac{-f'_x}{f'_y} \quad \text{بوده و از آنجا معادله مماس بر منحنی (۴):}$$

$$(۵) \quad (X - x) f'_x + (Y - y) f'_y = 0$$

که در آن f'_x و f'_y مشتقات جزئی f نسبت به x و y اند خواهد شد.

۱۲۳ - نقاط مخصوص یا مکرر - معادله خط مماس که در شماره قبل

برای منحنیات $f(x, y) = 0$ یاد آور شدیم چنانچه $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ هر دو بازااء مختصات نقطه M صفر شوند معنائی نداشته و چنین نقاط را نقاط مخصوص یا مکرر نامند

در حالتیکه سه مشتق جزئی مرتبه دوم یعنی $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

هر سه با هم صفر نباشند نقطه M خواه یک نقطه منفرد یعنی نقطه که از آن هیچ شاخه منحنی مرور نکرده خواه یک نقطه برخورد دو شاخه منحنی خواه یک نقطه بازگشت خواهد بود.

نقطه بازگشت نقطه ایست که دو شاخه منحنی در آن دارای یک خط مماس باشند شکل منحنی در این نقطه عموماً شکل (۱) ۳۴ بوده ولی ممکن است باشکال (۲)، (۳)، (۴) نیز در آید.

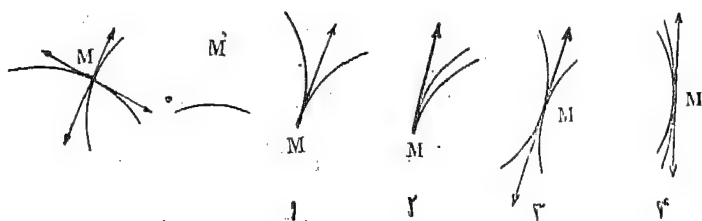
پس مختصات x و y یک نقطه مکرر از حل دستگاه :

$$f(x, y) = 0 \quad f'_x(x, y) = 0 \quad f'_y(x, y) = 0$$

بدست آمده و البته این دستگاه سه معادله دو مجهولی همیشه دارای جواب نخواهد بود. چنین نقاط را مکرر از مرتبه دوم یا نقاط مضاعف نامند.

چنانکه می بینیم هر قاطع غیر مشخصی که از یک نقطه ساده M مرور نماید منحنی را در یک نقطه M قطع نموده و در صورتیکه نقطه مضاعف باشد هر قاطع غیر مشخص منحنی را در دو نقطه منطبق بر هم قطع نموده و بطور کلی گویند :

نقطه M مکرر از مرتبه m میباشد چنانکه هر قاطع غیر مشخص که از آن نقطه مرور نماید منحنی را در m نقطه منطبق بر هم قطع نماید. در بین این قاطعها m خط وجود دارد که منحنی را هر کدام در $1 + m$ نقطه منطبق بر هم قطع مینمایند. و اینها همان m مماس نقطه M میباشد. و چنانکه در مورد $m = 2$ یاد آور شدیم مشتقات جزئی تابع f بازاء مختصات این نقاط تا مرتبه $1 - m$ صفر خواهند بود.



و همچنین ممکن است که نقطه مکرر λ در بینهایت واقع باشد.

۱۴۴ - نقطه مکرر در مبداء مختصات - بررسی يك نقطه از نظر مکرر بودن آن و همچنین بدست آوردن مماسهای منحنی در آن نقطه چنانکه این نقطه در مبداء مختصات باشد بآسانی صورت میگیرد. قضیه زیر را در این مورد یادآور میشویم. چنانکه نقطه در مبداء مختصات نباشد باید مبداء مختصات را بآن نقطه منتقل نمود.

قضیه - چنانکه جملات کوچکترین درجه يك معادله جبری بر حسب x و y از درجه m باشند مبداء مختصات يك نقطه مکرر از مرتبه m ام بوده و برای بدست آوردن دسته مماس آن نقطه کافی است که مجموع این جملات را مساوی صفر قرار دهیم. بدین منظور معادله منحنی را بصورت کثیر الجمله های همگن باقوای صعودی بصورت:

$$(۶) \quad f(x, y) \equiv \varphi_p(x, y) + \varphi_{p+1}(x, y) + \dots + \varphi_m(x, y) = 0$$

که در آن φ_p کثیر الجمله همگن از مرتبه m ام است مینویسیم و چون منحنی از مبداء مختصات میگذرد معادله آن دارای مقدار ثابت نخواهد بود. بطوریکه $m \geq 1$ میباشد چنانکه x و y مختصات نقطه از منحنی فرض شوند ضریب زاویه مماس در مبداء را میتوان حد نسبت $\frac{y}{x}$ و قتیکه x بسمت صفر میل نماید دانست. پس اگر:

$\frac{y}{x}$ را مساوی γ قرار دهیم $y = \gamma x$ شده و معادله (۶) چنین نوشته خواهد شد:

$$f(x, \gamma x) \equiv x^p \varphi_p(1, \gamma) + x^{p+1} \varphi_{p+1}(1, \gamma) + \dots + x^m \varphi_m(1, \gamma) = 0$$

این معادله پس از تقسیم بر x^p بصورت:

$$(۷) \quad \varphi_p(1, \gamma) + x \varphi_{p+1}(1, \gamma) + \dots + x^{m-p} \varphi_m(1, \gamma) = 0$$

درآمده و چنانکه گفتیم ریشه های این معادله بازاء $x = 0$ مقادیر ضریب زاویه های خطوط مماس بر شاخه های منحنی را خواهند داد.

پس کافی است که: $\varphi_p(1, \gamma) = 0$ باشد و این معادله بما نشان

میدهد که تمام خطوط غیر از Oy که توسط دسته خط: (۸) $\varphi_p(x, y) = 0$

نمایش داده شده اند مماسهای منحنی در نقطه O میباشد.
چنانکه x را بجای y و y را بجای x در محاسبات فوق قرار دهیم باز هم به همین نتیجه خواهیم رسید ولی در اینحال محور Ox محور استثنائی خواهد بود و از آنجا نتیجه میشود که معادله (۸) در هر حال نمایش دسته خط مماسها را میدهد.

این دسته خط چنانکه می بینیم شامل m خط حقیقی، موهومی، مجزا و یا منطبق بر هم بوده و از آنجا نتیجه میشود که منحنی در این نقطه دارای m مماس میباشد. و طبق تعریف نقاط مکرر چنین نقطه مکرر از مرتبه m ام خواهد بود. و نیز باید یاد آور شد که هر يك از این m مماس منحنی را در بیش از m نقطه منطبق بر هم قطع میکند.

چنانکه $1 = m$ یعنی نقطه ساده باشد قضیه فوق نیز قابل قبول بوده و در اینحال برای بدست آوردن معادله مماس کافی است که مجموع جملات درجه اول را مساوی صفر قرار دهیم.

۱۲۵ - مماس بر منحنی فضائی - منحنی فضائی (C) را فرض کرده \vec{OM} و در نتیجه مؤلفه های آن x, y, z توابعی از پارامتر s خواهند بود. چنانکه نقطه از آن دارای مماس بوده و مشتق $\frac{ds}{dt}$ نیز وجود داشته باشد بردار مشتق \vec{OM} چنانکه در مورد مشتق هندسی دیدیم

$$d(\vec{OM}) = \vec{i} \cdot dx + \vec{j} \cdot dy + \vec{k} \cdot dz$$

نیز وجود داشته و برداری مماس بر منحنی (C) خواهد بود. مؤلفه های این دیفرانسیل هندسی یعنی dx, dy, dz پارامترهای هادی خط مماس خواهند بود و همانطور که دیدیم قدر مطلق این مشتق هندسی $|ds|$ بوده و از آنجا:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

خواهد شد.

چنانکه قوس s را متغیر بگیریم $\frac{d(\vec{OM})}{ds}$ مساوی برداریکه «مماسیکه

درسوی قوسهای صعودی راستاد از شده است میباشد: در اینجا $\frac{dx}{ds}$ و $\frac{dy}{ds}$ و $\frac{dz}{ds}$ کوسینوسهای هادی مماسی که بدین ترتیب راستاد از شده است خواهند بود. پس معادله خط مماس یک خم چپ:

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz}$$

خواهد شد.

۱۴۶ - صفحه مماس بر یک سطح - فرض کنیم که سطح (S) توسط معادلات پارامتریش داده شده باشد مختصات هر نقطه M آن توابعی از دو پارامتر u و v بوده یعنی:

$$(۹) \quad x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v)$$

میباشند. از نقطه M واقع روی این سطح منحنی (C) غیر مشخص را روی آن رسم کرده میدانیم که معادله آن از گذاردن u و v بر حسب پارامتر دیگری در معادله (۹) بدست آمده و در نتیجه پارامترهای هادی مماس MT آن بر ترتیب dx ، dy ، dz یعنی:

$$\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \quad \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \quad \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

خواهند بود. پس معادلات پارامتری مماس بصورت:

$$\begin{cases} X-x = \rho \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \\ Y-y = \rho \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) \\ Z-z = \rho \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right) \end{cases}$$

نوشته شده و چنانچه ρdu و ρdv را بین این معادلات حذف کنیم معادله مکان MT و قتی که منحنی (C) را در روی این سطح تغییر دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$$

این معادله يك صفحه که صفحه مماس سطح (S) در نقطه M نامیده میشود نمایش میدهد.

تبصره - صفحه مماس نظیر نقطه مر بوطه اش بدو پارامتر مستقل x و y بستگی دارد ولی سطوحی نیز یافت میشوند که صفحه مماس در آنها به بیش از يك پارامتر بستگی نخواهد داشت چنین سطوح را گسترش پذیر گویند. صفحه مماس در این حال مماس بر سطح در طول يك خط خواهد بود مثلاً صفحه مماس بر يك مخروط.

$$۱۲۷ - \text{چنانکه معادله سطح بصورت: } f(x, y, z) = 0 \quad (۱۰)$$

داده شده باشد بهمان ترتیب که در شماره پیش عمل کردیم از نقطه $M(x, y, z)$ منحنی (C) غیر مشخصی واقع روی سطح مرور میدهیم. معادلات خط مماس بر این

$$(۱۱) \quad \frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz} \quad \text{منحنی:}$$

بوده و چون منحنی (C) روی سطح رسم شده است. مختصاتش در معادله (۱۰) صدق کرده و در نتیجه در معادله که از دیفرانسیل گرفتن این معادله بدست میآید نیز صدق

$$(۱۲) \quad f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz = 0.$$

خواهد شد. چنانکه dx ، dy ، dz را بین معادلات (۱۱) و (۱۲) حذف کنیم معادله:

$$(۱۳) \quad (X-x)f'_x + (Y-y)f'_y + (Z-z)f'_z = 0.$$

که نمایش يك صفحه را میدهد بدست خواهد آمد. این معادله مکان مماسهای M T بوده و صفحه مماس (S) در نقطه M نامیده میشود.

$$\text{چنانکه معادله سطح بصورت: } z = \varphi(x, y)$$

باشد معادله صفحه مماس بصورت:

$$(Z-z) = \frac{\partial z}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial z}{\partial y}(Y-y)$$

نوشته شده و چنانکه بر حسب قرار داد مشتقات جزئی z را:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$(Z-z) = p(X-x) + q(Y-y)$$

خواهد شد.

۱۴۸- خط قائم - صفحه قائم - خط قائم بر منحنی (C) در نقطه M بنا
 بتعریف خط عمود بر مماس MT این نقطه میباشد. چنانچه منحنی مسطحه باشد این
 خط یکی بوده و اگر منحنی فضائی باشد بینهایت خط قائم که همگی در یک صفحه که
 بصفحه قائم منحنی چپ موسوم است موجود میباشد.

نیم قائم مثبت - چنانکه منحنی مسطحه (C) را راستا دار فرض کنیم نیم قائم
 مثبت از دوران نیم مماس مثبت بزاویه $\frac{\pi}{4} +$ بدست میآید. چنانکه زاویه نیم
 مماس مثبت با محور Ox باشد زاویه نیم قائم مثبت با همین محور $\frac{\pi}{4} +$ خواهد بود.
 پس معادله خط قائم برای منحنی مسطحه (C):

$$(14) \quad (X - x) dx + (Y - y) dy = 0$$

خواهد شد.

صفحه قائم منحنی چپ (C) صفحه ایست عمود بر مماس MT و بنابراین معادله
 آن: $(X - x) dx + (Y - y) dy + (Z - z) dz = 0$
 میباشد. زیرا پارامترهای هادی مماس dx, dy, dz میباشد.

۱۴۹- خط قائم بر سطح - خط قائم بر سطح (S) در یک نقطه بنا بتعریف
 خط عمود به صفحه مماس همان نقطه میباشد.

پس اگر معادله سطح بصورت پارامتری داده شده باشد پارامترهای هادی این

$$\text{خط بترتیب: } \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}$$

خواهند بود. این مقادیر را بصورت:

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \quad \text{و} \quad \frac{D(y, z)}{D(u, v)}$$

که دترمینانهای توابعی نامیده میشوند نیز مینویسند.

صفحه قائم بر یک سطح هر صفحه که بر خط قائم آن سطح بگذرد میباشد.

چنانکه معادله سطح بصورت $(x, y, z) = 0$ داده شده باشد پارامترهای هادی قائم بترتیب x', y', z' خواهند بود.

و اگر معادله سطح: $z = f(x, y)$ باشد پارامترهای هادی قائم

چنانکه در معادله صفحه مماس دیده میشوند $(p, q, -1)$ میباشد پس در اینحال معادله خط قائم: $\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}$ خواهد بود.

۱۳۰ - تحت مماس و تحت قائم - منحنی (C) را بمعادله: $y = f(x)$

فرض کرده مماس در نقطه M بر این منحنی $Y - y = y'(X - x)$ میباشد

چنانکه Y را ∞ قرار دهیم طول نقطه T محل برخورد خط با محور Ox بدست آمده و چنانکه P را تصویر نقطه M روی همین محور بگیریم:

$$\overline{PT} = X - x = -\frac{y}{y'}$$

خواهد شد این مقدار را تحت مماس نقطه M نامند.

N را نقطه برخورد خط قائم با محور Ox فرض کرده اندازه \overline{PN} را تحت قائم

نامند. اندازه \overline{PN} از مثلث MTN بدست میآید:

$$\overline{PN} = -\frac{\overline{PM}^2}{\overline{PT}} = -\frac{y^2}{-\frac{y}{y'}} = yy'$$

۱۳۱ - مسئله ۱ - مطلوبست تعیین مماسهاییکه از یک نقطه میگذرند -

چنانکه منحنی مسطحه (C) برحسب معادلات پارامتریش داده شده باشد معادله

مماس برحسب پارامتر t معلوم بوده و کافی است بنویسیم که مختصات (x_0, y_0) آن

نقطه در این معادله صدق میکنند. بدین ترتیب معادله برحسب t که ریشه هایش

مماسهای مطلوب را معلوم میکنند خواهیم داشت.

چنانکه معادله منحنی بصورت: $f(x, y) = 0$ باشد معادله مماس را

نوشته و شرط آنکه این خط از نقطه (x_0, y_0) مرور نماید بیان میکنیم بدین ترتیب

معادله برحسب x و y داشته ریشه های این معادله و معادله $f = 0$ مختصات نقاط

تماس را بما خواهند داد.

۱۳۲ - مسئله ۲ - مطلوب است تعیین قائمهاییکه از يك نقطه میگذرند -

چنانکه منحنی مسطحه (C) توسط معادلات پارامتریش داده شده باشد شرط آنکه خط قائم دریك نقطه غیرمشخص منحنی از نقطه مزبور بگذرد مینویسیم بدین ترتیب معادله بر حسب x که ریشه های آن پارامترهای نقاط برخورد قائمها و منحنی هستند خواهیم داشت .

چنانکه معادله منحنی بصورت : $f(x, y) = 0$ داده شده باشد نظیر آنچه که گفتیم شرط آنکه نقطه مزبور روی قائمی واقع باشد آنستکه :

$$(x_0 - x)f'y - (y_0 - y)f'x \neq 0$$

باشد . این معادله يك منحنی که با منحنی مفروض در نقاط خروج قائمهای مطلوب برخورد مینماید نمایش خواهد داد .



بخش دهم

بررسی يك منحنی در نزدیکی یکی از نقاط آن

۱۳۳ - منحنی هامنی که معادله آن بصورت $y = f(x)$ داده شده باشد - **تقعر** - بررسی يك منحنی درحوالی یکی از نقاط آن بررسی وضعیت منحنی نسبت بمماس در آن نقطه میباشد .

فرض کنیم که تابع (x) بازاء x_0 متغیر دارای مشتق (x_0) f' بوده یعنی منحنی در نقطه M_0 دارای مماس T_0 M_0 غیر موازی Oy میباشد .

تعریف - گویند تقعر منحنی در نقطه M_0 بسمت y های مثبت است چنانکه بتوان بازاء تمام مقادیر x نزدیک به x_0 عدد مثبت ϵ را پیدا نمود بطوریکه :
 $|x - x_0| < \epsilon$ بوده و عرض نقطه از منحنی که طول آن x است بزرگتر از عرض مربوط بهمان طول روی مماس T_0 باشد .

چنانکه بازاء همان مقادیر x عرض نقطه مربوط بطول x منحنی کوچکتر از عرض نقطه مربوط بهمان طول مماس باشد گویند که در M_0 منحنی تقعر خود را بسمت y های منفی دارد .

P را نقطه برخورد مماس T_0 M_0 با خطی موازی Oy گرفته . Y نقطه P از معادله M_0 T_0 بدست میآید :

$$Y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$$

M را نقطه برخورد همان خط بامنحنی گرفته اندازه جبری \overrightarrow{PM} مساوی $y - Y$ بوده ومسئله منجر ببررسی علامت این مقدار درحوالی x_0 میباشد . ولی این تفاضل تابعی از x بوده ومساوی :
 $\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0)$
 میباشد . این تابع بازاء $x = x_0$ صفر شده و برای شناختن علامتش درحوالی این

مقدار کافی است که جهت تغییراتش را در فاصله که شامل x_0 است بدانیم. بدین منظور مشتق آنرا حساب میکنیم: $\varphi'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ این مقدار هم بازاء x_0 صفر شده پس مقدار: $\varphi''(x) = f''(x)$ را حساب میکنیم. حال عدد مثبت α را طوری انتخاب میکنیم که $f''(x)$ در فواصل:

$(x_0 - \alpha, x_0)$ و $(x_0, x_0 + \alpha)$ دارای يك علامت باشد.

پس از آنجا چند حالت ممکن است اتفاق افتد:

۱- $f''(x) > 0$ در فواصل $x_0 - \alpha < x < x_0$ و $x_0 < x < x_0 + \alpha$

میباشد تابع $\varphi(x)$ در هر دو فاصله صعودی بوده چنانکه x صعود نموده و از x_0 بگذرد علامتش از - بهلازه خواهد شد پس $\varphi(x)$ دارای می نیمم صفر بوده و بازاء تمام این مقادیر x مثبت خواهد بود. در M_0 تقعر منحنی بسمت y های مثبت است. ش ۱.

۲- $f''(x) < 0$ در فواصل $x_0 - \alpha < x < x_0$ و $x_0 < x < x_0 + \alpha$

بهمان ترتیب ثابت میشود که تقعر منحنی در M_0 بسمت y های منفی است.

پس بطور کلی نتیجه میشود که چنانچه $f''(x)$ دارای علامت ثابتی در فاصله

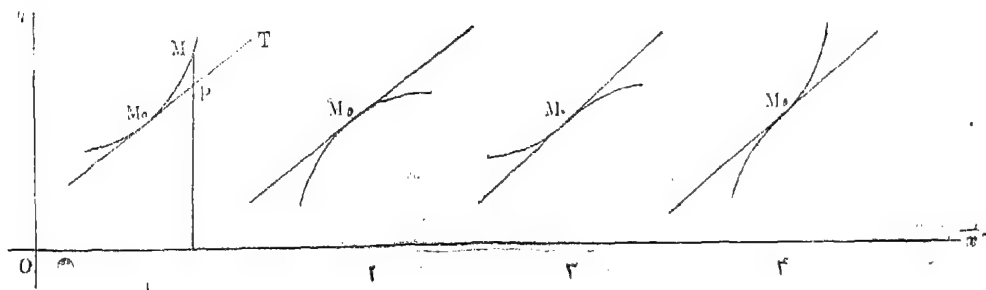
(α, δ) باشد قوس \widehat{AB} مربوطه تماماً در یکطرف مماس واقع میباشد ش ۲.

۳- $f''(x)$ در فواصل $(x_0 - \alpha, x_0)$ و $(x_0, x_0 + \alpha)$ دارای

علامات مختلف است.

در این حالت جهت تغییرات $\varphi'(x)$ و قتیکه x از x_0 بگذرد تغییر میکند -

و چون این تابع بازاء x_0 صفر میشود پس بازاء این مقدار تغییر علامت نخواهد داد



و از آنجا نتیجه میشود که جهت تغییرات $r(x)$ عوض نشده و چون $r(x_0) = 0$ است $r(x)$ وقتی که x از x_0 بگذرد تغییر علامت خواهد داد پس دو قوس منحنی C که به M_0 منتهی میشوند در دو طرف مماس $M_0 T$ واقع بوده و نقطه M_0 نقطه عطف منحنی خواهد بود. ش ۳ - ۴ -

۱۳۴ - منحنی هامنی که معادله آن بصورت پارامتری داده شده باشد -
 منحنی (C) را بمعادلات $y = g(t)$ $x = f(t)$ فرض کرده
 نقطه $M(x, y)$ و $M_1(x_1, y_1)$ را مربوط بمقادیر t و t_1 پارامتر میگیریم.
 مشتق هندسی مرتبه m بردار \vec{OM} را بصورت \vec{V}_m و تصاویر آنرا روی محورهای مختصات به $x^{(m)}$ و $y^{(m)}$ نمایش میدهیم. \vec{V}_m برداری که از M همسنگ \vec{V}_m کشیده شده است خواهد بود. چنانکه توابع $f(t)$ و $g(t)$ را قابل بسط بر حسب فرمول تیلور فرض کرده باشیم داشت:

$$\begin{cases} x_1 - x = (t_1 - t)x' + \frac{(t_1 - t)^2}{2}x'' + \dots + \frac{(t_1 - t)^n}{n!}[x^{(n)} + \epsilon] \\ y_1 - y = (t_1 - t)y' + \frac{(t_1 - t)^2}{2}y'' + \dots + \frac{(t_1 - t)^n}{n!}[y^{(n)} + \epsilon_1] \end{cases}$$

ϵ و ϵ_1 با بینهایت کوچک شدن $t_1 - t$ بینهایت کوچک خواهند شد بستگی های فوق را بصورت هندسی زیر نیز میتوان نوشت:

$$\vec{MM}_1 = (t_1 - t)\vec{MV}_1 + \frac{(t_1 - t)^2}{2!}\vec{MV}_2 + \dots + \frac{(t_1 - t)^n}{n!}\vec{MW}_n$$

\vec{MW}_n برداریست که مؤلفه های آن: $x^{(n)} + \epsilon$ و $y^{(n)} + \epsilon_1$ بوده و چنانکه t_1 بسمت t میل نماید \vec{MW}_n بسمت \vec{MV}_n میل خواهد نمود.

حالت کلی - فرض کنیم که نقطه M نقطه خصوصی نباشد چنانکه t_1 بسمت t

میل نماید $\frac{\vec{MM}_1}{t_1 - t}$ بسمت \vec{MV}_1 میل خواهد کرد. چنانکه $t_1 - t > 0$ باشد دو بردار

\vec{MM}_1 و $\frac{\vec{MM}_1}{t_1 - t}$ همسو و گرنه باسوهای مخالفند. پس میتوان يك عدد > 0 پیدا

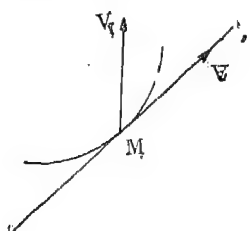
نمود بطوریکه بازاء مقادیر ϵ واقع در فاصله $(\epsilon, \epsilon + \alpha)$ دو بردار \vec{MM}_1 و \vec{MV}_1 در یکطرف خط غیر مشخص (D) که از M مرور کرده و مماس در M نباشد واقع بوده و بازاء ϵ واقع در فاصله $(\epsilon, \epsilon - \alpha)$ دو بردار \vec{MM}_1 و \vec{MV}_1 در دو طرف D واقع شوند.

۲ - معمولاً مشتق دوم \vec{MV}_2 صفر نبوده و حامل آن با \vec{MV}_1 نیز فرق دارد چون بر حسب دستور تیلور:

$$\vec{MM}_1 = (\epsilon_1 - \epsilon) \vec{MV}_1 + \frac{(\epsilon_1 - \epsilon)^2}{2} \vec{MV}_2$$

است پس وقتی که ϵ بسمت ϵ میل کند \vec{MW}_2 بسمت \vec{MV}_2 میل کرده و از آنجا بازاء ϵ که باندازه کافی نزدیک به ϵ باشد \vec{MW}_2 و \vec{MV}_2 در یک سمت مماس (\vec{MV}_1) واقع خواهند بود. بردار \vec{MM}_1 نیز در همان طرف بردار \vec{MV}_2 واقع بوزده و نتایج بالا را بطریق زیر میتوان خلاصه نمود:

قضیه - منحنی C که معادله آن بصورت پارامتری داده شده مفروض میباشد - خط D مفروض که از M گذشته و غیر از مماس در آن نقطه است در نظر میگیریم همیشه میتوان یک عدد مثبت ϵ پیدا نمود بطوریکه قوسهای منحنی C مربوط بفواصل $(\epsilon, \epsilon + \alpha)$ و $(\epsilon, \epsilon - \alpha)$ در دو طرف این خط واقع شوند. قوس مربوط بفاصله $(\epsilon, \epsilon + \alpha)$ در همان طرف مشتق \vec{MV}_1 نیز واقع شده است. ۲ - چنانکه \vec{MV}_2 (مشتق دوم \vec{OM}) وجود داشته و مخالف صفر بوده و همچنین



امتداد آن با مماس در M فرق داشته باشد قوسهای منحنی C در حوالی نقطه M و بردار \vec{MV}_2 در یکطرف مماس واقع خواهند بود.

این موضوع را بطور دیگر نیز میتوان گفت:

بردار \vec{MV}_2 در طرف تقعر منحنی ممتد میباشد.

ش ۳۶

تبصره ۱ - \vec{MV}_1 همان بردار است که سوی نیم مماس مثبت را برای ما مشخص مینماید.

تبصره ۳- باید یادآور شد که فرض آنکه \vec{V}_1 و \vec{V}_p صفر نبوده و امتدادشان

نیز مختلف باشد بصورت نامساوی: $x' y'' - y' x'' \neq 0$ نوشته میشود.

حالات مخصوص - چنانکه نقطه M نقطه مخصوص نبوده ولی $\vec{M}\vec{V}_p$ صفر

و یا بامماس دريك امتداد باشد و یا آنکه M نقطه مخصوص باشد ($x' = 0, y' = 0$)

مقدار $x' y'' - y' x''$ در هر دو حال صفر خواهد بود. \vec{V}_p را اولین مشتق

$\vec{U}\vec{M}$ مخالف صفر و \vec{V}_q را اولین بردار مشتق هندسی از مرتبه بالاتر از p که هم امتداد \vec{V}_p نباشد فرض میکنیم.

چنانکه q بزرگتر از p+1 باشد بهر بردار $\vec{V}_p + r$ ($r = 1, 2, \dots, q-p-1$)

عدد a_r بطوریکه $\vec{V}_p + r = a_r \vec{V}_p$ باشد مربوط بوده و فرمول تیلور چنانکه

$$t - t_1 = h$$

$$(1) \quad \vec{M}\vec{M}_1 = \left[\frac{h^p}{p!} + a_1 \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} + \dots + a_{q-p-1} \frac{h^{q-1}}{(q-1)!} \right] \vec{M}\vec{V}_p + \frac{h^q}{q!} \vec{M}\vec{W}_q$$

نوشته میشود. چنانکه h بسمت صفر میل کند $\vec{M}\vec{W}_q$ بسمت $\vec{M}\vec{V}_q$ میل خواهد کرد.

این بستگی را بصورت ساده تر:

$$\vec{M}\vec{M}_1 = \frac{h^p}{p!} (1 + a_1) \vec{M}\vec{V}_p + \frac{h^q}{q!} \vec{M}\vec{W}_q$$

نیز میتوان نوشت. چنانکه h بینهایت کوچک شود a_1 نیز بینهایت کوچک خواهد شد

$$\vec{M}\vec{P} = \frac{h^p}{p!} (1 + a_1) \vec{M}\vec{V}_p \quad \text{همان امتداد بردار مماس به C}$$

در M بوده و بر حسب آنکه a_1 مثبت یا منفی باشد دو بردار $\vec{M}\vec{P}$ و $\vec{M}\vec{V}_p$ همسو یا با سوهای مخالف خواهند بود.

همچنین دو بردار $\vec{M}\vec{V}_q$ و $\vec{M}\vec{Q} = \frac{h^q}{q!} \vec{M}\vec{W}_q$ بازاء مقادیر کوچک h در یکطرف

یا در دو طرف مماس بر حسب آنکه a_1 مثبت یا منفی باشد واقع خواهند بود. پس از آنجا منحنی C یکی از اشکال (۳۷) را بر حسب زوج یا فرد بودن q خواهد داشت.

اگر p فرد و q زوج باشد سوی بردار $\vec{M}\vec{P}$ چنانکه a_1 از مقدار ۱ بگذرد تغییر

کرده و دو قوس منحنی و قتیکه a_1 از راست یا از چپ بسمت ۱ میل کند نظیر همان

حالت کلی خواهند بود. حالت کلی هم بازاء $m = 1$ و $n = 2$ نیز بدست آمده است. (ش ۱).

اگر m و n هر دو فرد باشند مقدار $(t_1 - t)^p$ و قتیکه t_1 از t بگذرد تغییر علامت داده و دو قوس منحنی و قتیکه t_1 از راست یا از چپ بسمت t میل کند در دو طرف هر خطی که از M بگذرد خواهند بود. در اینحال M نقطه عطف بوده (ش ۲) و بازاء $m = 1$ و $n = 3$ مثلاً اینحال اتفاق میافتد. در حالت خاص اخیر \vec{MV}_1 صفر نبوده ولی \vec{MV}_2 صفر یا بامماس در یک امتداد است بدون آنکه \vec{MV}_2 صفر باشد یعنی $(x''', y''') - (x'', y'') = 0$ و $(x''', y''') - (x', y') \neq 0$ در اینحال میتوان عدد α_1 را پیدانمود بطوریکه: $x''' = \alpha_1 x''$ و $y''' = \alpha_1 y''$ باشند. فرمول (۱) هم بصورت:

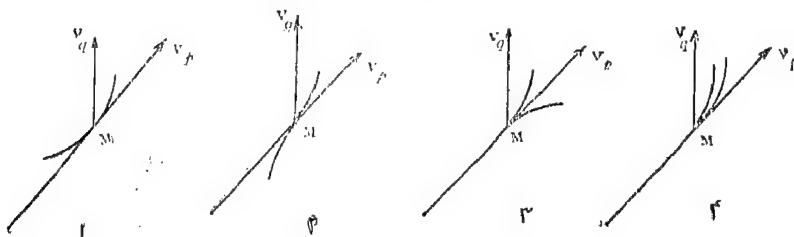
$$\vec{MM}_1 = \left[(t_1 - t) + \frac{\alpha_1}{2} (t_1 - t)^2 \right] \vec{MV}_1 + \frac{(t_1 - t)^3}{3!} \vec{MW}_2$$

اگر m زوج و n فرد باشد دو قوس منحنی در حوالی این نقطه در دو طرف مماس واقع بوده گویند که M نقطه بازگشت از نوع اول است (ش ۳).

اینحال اغلب در نقاط مخصوص اتفاق میافتد در آنحال \vec{MV}_1 صفر و \vec{MV}_2 مخالف صفر و \vec{MV}_3 هم مخالف صفر و بدون آنکه هم امتداد مماس باشد خواهند بود ($m = 2, n = 3$) فرمول (۱) در حالت خاص اخیر بصورت:

$$\vec{MM}_1 = \frac{(t_1 - t)^2}{2!} \vec{MV}_2 + \frac{(t_1 - t)^3}{3!} \vec{MW}_2$$

و بالاخره چنانکه m و n هر دو زوج باشند دو قوس منحنی در یکطرف هر خطی که از M بگذرد حتی مماس واقع بوده گویند که M نقطه بازگشت از نوع دوم میباشد. مثلاً بازاء $m = 2$ و $n = 4$ اینحال اتفاق خواهد افتاد.



۱۳۵ - نقاط عطف - بر حسب آنچه که تا بحال گفتیم نقطه عطف نقطه ایست که در آن منحنی از هر خطی که از این نقطه بگذرد مرور مینماید. در چنین نقطه بر حسب آنکه معادله بصورت $y = f(x)$ باشد $y' = 0$ بوده و اگر منحنی بصورت پارامتری داده شده باشد: $x' y'' - y' x'' = 0$ خواهد شد.

ولی طبق آنچه که دیدیم مقدار $x' y'' - y' x''$ ممکن است صفر باشد بدون آنکه منحنی از مماس مرور نماید. اما بدون در نظر گرفتن این مطلب هر نقطه که مخصوص نبوده و در آن $x' y'' - y' x'' = 0$ باشد نقطه عطف نامیده میشود. نقاط عطف دارای خواص زیر میباشند:

۱- معادله نقاط برخورد منحنی و مماس در M_0

$$|f'(t_0) - g'(t_0)| = |f(t_0) - g(t_0)| = 0$$

بوده این معادله مقادیر t مربوط باین نقاط را بیا میدهد. چنانکه مشتق دوم طرف اول این معادله صفر باشد t_0 ریشه سوم این معادله خواهد بود.

ولی این مشتق دوم $f'(t_0) g''(t_0) - g'(t_0) f''(t_0)$ در نقاط عطف صفر بوده و از آنجا نتیجه میشود که نقاط عطف نقاطی هستند که خط مماس منحنی را لاقبل در سه نقطه منطبق بر نقطه تماس قطع مینماید.

۲- ضریب زاویه مماس در M : $m = \frac{y'}{x'}$ بوده و چون مشتق این مقدار را حساب کنیم: $m' = \frac{x' y'' - y' x''}{x'^2}$ شده و چون در نقاط عطف

$x' y'' - y' x'' = 0$ است پس نتیجه میشود که: اولاً در نقاط عطف ضریب زاویه مماس از يك ماکزیمم و یا می نیمم میگردد و ثانیاً آنکه جهت تغییرات m و قتیکه M نقطه بازگشت نوع اول باشد تغییر نخواهد کرد. ثالثاً فقط خط مستقیم است که تمام نقاط آن نقاط عطف میباشند زیرا اگر $y' = 0$ باشد y تابع خطی از x خواهد بود.

۱۳۶- خم چپ در نزدیکی یکی از نقاط آن - صفحه بوسان - منحنی (C)

که توسط معادلات: $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ داده شده

است فرض کرده نقاط $M(x, y, z)$ و $M_1(x_1, y_1, z_1)$ که مربوط بمقادیر t و t_1 پارامترند روی آن در نظر میگیریم. \vec{V}_M را مشتق هندسی مرتبه m بردار \vec{OM} نسبت به t و $x^{(m)}$ و $y^{(m)}$ و $z^{(m)}$ را تصاویر این مشتق نیز فرض کرده و \vec{MV}_M را بردار همسنگ \vec{V}_M که از نقطه M مرور داده‌ایم فرض میکنیم.

چنانکه توابع فوق را برحسب فرمول تیلور بسط دهیم

$$x_1 - x = (t_1 - t)x' + \frac{(t_1 - t)^2}{2}x'' + \dots + \frac{(t_1 - t)^n}{n!} [x^{(n)} + \epsilon]$$

$$y_1 - y = (t_1 - t)y' + \frac{(t_1 - t)^2}{2}y'' + \dots + \frac{(t_1 - t)^n}{n!} [y^{(n)} + \epsilon_1]$$

$$z_1 - z = (t_1 - t)z' + \frac{(t_1 - t)^2}{2}z'' + \dots + \frac{(t_1 - t)^n}{n!} [z^{(n)} + \epsilon_2]$$

ϵ و ϵ_1 و ϵ_2 مقادیری هستند که باینهایت کوچک شدن $t_1 - t$ بینهایت کوچک خواهند شد.

این سه بسط را میتوان بصورت هندسی

$$\vec{MM}_1 = (t_1 - t)\vec{MV}_1 + \frac{(t_1 - t)^2}{2}\vec{MV}_2 + \dots + \frac{(t_1 - t)^n}{n!}\vec{MW}_n$$

که در آن \vec{MW}_n برداری باتصاویر $x^{(n)} + \epsilon$ و $y^{(n)} + \epsilon_1$ و $z^{(n)} + \epsilon_2$ میباشد خلاصه نمود. چنانچه t_1 بسمت t میل نماید \vec{MW}_n بسمت \vec{MV}_n نیز میل خواهد کرد.

صفحه بوسان - تعریف - نقطه M را ثابت و M_1 را متغیر و نزدیک بآب میگیریم چنانچه صفحه که برخط مماس در M و نقطه M_1 مرور نماید دارای حدی وقتی که M_1 بسمت M میل کند باشد آن صفحه را در حد صفحه بوسان منحنی در نقطه M نامند.

چنانکه این تعریف را درباره خمهای هائمی بکار ببریم خواهیم دید که صفحه منحنی همان صفحه بوسان برای نقاط آن خواهد بود.

قضیه ۱ - چنانچه مشتقات دوم مختصات نقطه M منحنی چپ همگی بازاء پارامتر آن نقطه صفر نبوده و اگر این مشتقات دوم متناسب بامشتقات اول نباشند منحنی در نقطه M دارای صفحه بوسان خواهد بود.

اثبات - با آنچه که نسبت بمعادله منحنی و مختصات نقاط M_1 و M فرض کردیم بازاء مقادیر x نزدیک به x فرمول تیلور را بصورت :

$$\vec{MM}_1 = (x_1 - x) \vec{MV}_1 + \frac{(x_1 - x)^2}{2} \vec{MW}_1$$

میتوانیم بنویسیم . بردار (x', y', z') مشتق هندسی اول بردار OM و \vec{MW}_1 بردار است که بسمت (x'', y'', z'') \vec{MV}_1 و قتیکه x_1 بسمت x میل نماید میل خواهد کرد .

امتداد بردار \vec{MV}_1 مماس در M بوده و صفحه ای که بر این مماس و نقطه M_1 بگذرد شامل \vec{MW}_1 نیز خواهد بود . و چنانچه نقطه M_1 بسمت M میل کند حد این صفحه حد صفحه دو بردار \vec{MV}_1 و \vec{MW}_1 خواهد شد . (البته فرض شده است که \vec{MW}_1 هم دارای امتداد مماس \vec{MV}_1 نباشد) . پس قضیه بدین ترتیب اثبات میشود . این قضیه را بصورت زیر نیز میتوان بیان نمود .

با شرایطیکه قبلاً گفتیم یعنی دو بردار \vec{MV}_1 و \vec{MW}_1 مخالف صفر بوده و امتداد های مختلف داشته باشند صفحه که شامل این دو بردار بوده و از M بگذرد صفحه بوسان نقطه M خواهد بود .

۱۴۷ - معادله صفحه بوسان - صفحه بوسان چنانکه گفتیم صفحه ایست که از نقطه M گذشته و شامل دو بردار \vec{MV}_1 و \vec{MW}_1 باشد پس معادله اش بصورت :

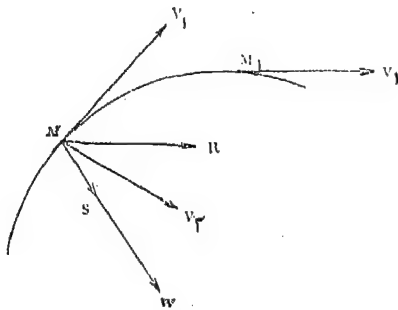
$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$$

نوشته خواهد شد .

تبصره - چنانکه پارامتر x را زمان و مختصات x, y, z را مختصات نقطه متحرك M بگیریم گوئیم که صفحه بوسان شامل سرعت و شتاب نقطه مادی M میباشد .

۱۴۸ - قضیه ۲ - نقاط M و M_1 و مماسهای این نقاط را فرض کرده حد صفحه که بر مماس در M بموازاات مماس در M_1 مرور نماید و قتیکه M_1 بسمت M میل کند صفحه بوسان خواهد بود .

گرفته بردار \vec{MR} را بتصاویر این مقادیر فرض میکنیم. صفحه Q که توسط دو بردار



ش ۳۸

\vec{MV}_1 و \vec{MR} مشخص شده است در نظر گرفته این صفحه شامل بردار \vec{MS} که همسنگ $\vec{V}_1 R$ از نقطه M رسم شده است میباشد. پس از آنجا این صفحه شامل بردار $\vec{MW}_1 = \frac{\vec{MS}}{t_1 - t}$ نیز خواهد

بود. حال تصاویر این بردار بترتیب

بسمت مشتقات دوم z'' ، y'' ، x'' میل خواهند نمود. و از آنجا بردار \vec{MW}_1 بسمت

برداری \vec{MV}_2 و صفحه Q بسمت صفحه بوسان نقطه M میل خواهند کرد.

۱۳۹ - قائم اصلی - بین تمام خطوط قائم در نقطه M قائم واقع در صفحه

بوسان به قائم اصلی موسوم و همچنین بین این قائمها قائم عمود بصفحه بوسان بی نرمال نامیده میشود. سه امتداد مماس و قائم اصلی و بی نرمال در هر نقطه M يك سه وجهی که سه وجهی فرنه (Frenet) موسوم است تشکیل میدهند صفحه TMN صفحه بوسان صفحه BMN قائم و صفحه TMB صفحه رکتیفیان نقطه M نامیده میشوند.



بخش یازدهم

رسم منحنیات

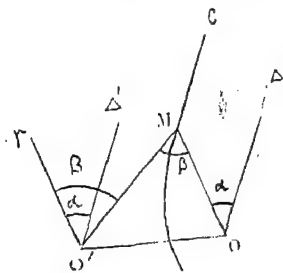
۱- رسم منحنی که معادله آن بصورت $y = f(x)$ داده شده باشد

شاخه بینهایت - مجانب

۱۴۰- شاخه بینهایت - چنانکه فاصله نقطه M واقع روی يك منحنی مسطحه یا فضائی از نقطه ثابت O بینهایت شود گویند نقطه M يك شاخه بینهایت منحنی را پیموده و یا آنکه بسمت بینهایت دور میشود.

امتداد مجانب - اگر نقطه M واقع روی يك شاخه يك منحنی مسطحه یا فضائی را بدو نقطه ثابت O و O' وصل کنیم چنانکه با بینهایت دور شدن این نقطه دو خط OM و $O'M$ بسمت دوحد $O\Delta$ و $O'\Delta'$ موازی میل کنند امتداد مشترك این دوحد را امتداد مجانب شاخه بینهایت منحنی نامند.

چنانکه دیده میشود این امتداد مشترك بستگی بنقطه ثابت نخواهد داشت.



ش ۳۹

فرض کنیم که حد خط OM وقتی که

بسمت بینهایت دور شود خط $O\Delta$ باشد زاویه

و خط $O'M$ موازی $O\Delta$ و همسوی آن بسمت

خط $O'\Delta'$ موازی $O\Delta$ میل خواهد کرد.

چنانکه $\beta = \angle MO'O$ باشد.

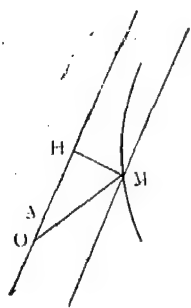
$$\sin \beta = OO' \times \frac{\sin \angle OO'M}{OM}$$

خواهد شد. حال طرف دوم این بستگی بسمت صفر میل کرده و از آنجا طرف اول آن نیز

بسمت صفر یعنی $MO' = \beta$ بسمت صفر میل خواهد کرد. و چون خواه سه خط MO' و $O'\Delta'$ و $O'M$ در يك صفحه بوده و یا در يك صفحه نباشند گوشه $\Delta' O' M$ منتها مساوی مجموع زوایای α و β که هر دو بسمت صفر میل میکنند میباشد از آنجا این زاویه بسمت صفر میل کرده و $O'M$ بسمت $O'\Delta'$ میل خواهد کرد.

نقطه M مشترك بين OM و $O'M$ در حد تقاطع بینهایت امتداد Δ خواهد شد. تبصره - شاخه بینهایت هر منحنی همیشه دارای امتداد مجانب نمیشد مثلاً در منحنی: $y = x(1 + \sin x)$ بازاء $x = \infty$ بینهایت میشود ولی ضرب زوايه خط OM مساوی $x + \sin x$ بوده و بين مقادير ۱ و ۳ نوسان خواهد کرد. و بازاء x بینهایت بسمت هیچ حد معینی میل نخواهد کرد.

۱۴۱- مجانب - خط A را مجانب يك شاخه منحنی گویند چنانچه فاصله نقطه M منحنی از این خط وقتی که این نقطه روی شاخه منحنی بسمت بینهایت دور شود بسمت صفر میل نماید. و یا آنکه خط موازی A که از M گذشته باشد بسمت A میل نماید. قضیه - چنانکه خط A مجانب C باشد امتداد آن امتداد مجانب خواهد بود.



نقطه O را روی A گرفته MH را فاصله نقطه M منحنی از خط مجانب فرض میکنیم. این فاصله چنانکه بسمت بینهایت رود صفر شده و در نتیجه زاویه O مثلث قائم MOH نیز صفر خواهد شد. پس از آنجا خط OM بسمت A میل کرده و قضیه ثابت میشود.

بحث - Δ را امتداد مجانب شاخه بینهایت منحنی C

فرض کرده چنانکه M موازی آن از نقطه M باشد با ش ۴۰ بینهایت دور شدن M روی C سه حالت ممکن است اتفاق افتد:

- ۱- خط M بسمت وضعیت حد A بطوریکه فاصله نقطه M از این خط بسمت صفر میل کند میل خواهد کرد در اینحال خط A مجانب منحنی خواهد بود.
- ۲- خط M بسمت بینهایت دور میشود گویند شاخه C شلجمی شکل است.

۳- خط $M\alpha$ بسمت هیچ وضعیت حدی میل نمی‌نماید.

تبصره ۱- نام شلجمی شکل از این جهت است که چون در معادله شلجمی $y^2 = 2px$ شاخه $y = \sqrt{2px}$ را بگیریم نسبت $\frac{y}{x}$ و قتیکه x بینهایت شود صفر شده و از آنجا امتداد Ox امتداد مجانب خواهد بود و چون y بازاء $x = \infty$ بینهایت میشود پس خط موازی $x'x$ که از نقطه $M(x, y)$ مرور کرده باشد بسمت بینهایت دور خواهد شد.

تبصره ۲- يك مثال از منحنیات نوع سوم منحنی $y = \sin x$ میباشد و قتیکه x بینهایت شود $\frac{y}{x}$ بسمت صفر میل کرده و از آنجا خطی که نقطه O را به M وصل میکند بسمت Ox میل خواهد کرد. پس امتداد مجانب بوده ولی خط موازی $x'x$ که از M مرور نماید بسمت حدی میل نخواهد کرد.

۱۴۲- قضیه - چنانکه مماس در نقطه M بر منحنی C و قتیکه M بسمت بینهایت دور شود بسمت وضعیت حد A میل نماید خط A مجانب شاخه بینهایت C خواهد بود.

اثبات- را نقطه بینهایت خط مجانب A گرفته این نقطه را میتوان نقطه بینهایت شاخه منحنی نیز دانست. چنانچه از نقطه M منحنی خطی موازی A رسم کنیم این خط همان $M\alpha$ خواهد بود و چون M بسمت α میل کند خط A وضعیت حد $M\alpha$ را میتوان مماس بر منحنی در نقطه α دانست. پس میتوان مجانب هر شاخه منحنی را مماس در نقطه بینهایت آن شاخه فرض نمود.

۱۴۳- بررسی شاخه های بینهایت منحنیاتی که معادلات آنها بصورت $y = f(x)$ داده شده باشد.

میخواهیم شاخه های بینهایت و همچنین مجانب های این منحنیات را در صورت موجود بودن تعیین نماییم و علاوه بر صورت اخیر بررسی وضعیت منحنی نسبت بمجانبش یعنی طرفی که منحنی نسبت بمجانبش قرار گرفته است نیز منظور میباشد.

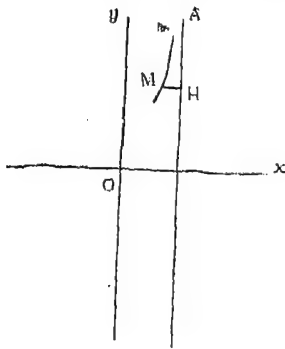
برای آنکه نقطه شاخه بینهایت منحنی را بییماید لازم و کافی است که لااقل یکی از مختصات x و y آن بینهایت شوند. بدین منظور حالات مختلف را بررسی مییمائیم:

۱- چنانکه بازاء $x = a$ مقدار y بینهایت شود خط A بمعادله: $x = a$ بجانب منحنی خواهد بود.

x و y را مختصات نقطه M گرفته و بعلاوه فرض کنیم که بازاء مقادیر x که از سمت چپ به a نزدیک میشوند y بسمت بینهایت میل کند.

خط MH را موازی $x'x$ کشیده تا A را در H قطع نماید. حال: $HM = x - a$ فاصله نقطه M از خط A بوده و بسمت صفر میل خواهد نمود.

پس A بجانب منحنی خواهد بود شاخه منحنی در چپ بجانب بوده و بعلاوه چنانکه بدانیم y با چه علامتی بینهایت میشود سمتیکه نقطه M بدان میروود خواهیم دانست و از آنجا وضعیت منحنی نسبت بمجانبش معین خواهد شد.



ش ۴۱

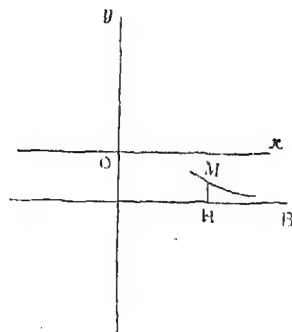
چنانکه بازاء مقادیر x که از سمت چپ یا از سمت راست به a نزدیک شوند y بینهایت شود منحنی دارای دو شاخه بجانب به A خواهد بود. یکی از آنها در چپ و دیگری در راست این خط واقع میباشند.

۲- چنانکه بازاء x بینهایت y بسمت حد b میل کند خط B بمعادله $y = b$ بجانب منحنی خواهد بود

فرض کنیم که چنانکه x بازاء مقادیر مثبت بسمت ∞ میل کند y بسمت b میل خواهد کرد.

خطی موازی $y'y'$ از نقطه $M(x, y)$ منحنی کشیده تا B را در H قطع نماید $HM = y - b$ فاصله نقطه M از خط B بوده و بسمت صفر میل مییماید.

پس از آنجا خط B بجانب منحنی و نقطه M در سمت راست B روی شاخه مربوطه به بینهایت میروود.



ش ۴۲

برای تکمیل بررسی وضعیت منحنی نسبت به مجانب کافی است علامت $y - k$ را بازاا مقادیر بزرگ x بدانیم. چنانکه $y - k$ همیشه مثبت باشد M بالای B واقع شده و اگر منفی باشد M زیر خط B واقع خواهد بود.

چنانکه بازاا مقادیر هم مثبت و هم منفی x که بسمت بینهایت میل کنند y بسمت k میل نماید دوشاخه منحنی به مجانب B که یکی در چپ و دیگری در راست خواهد بود وجود خواهند داشت.

تبعصره ۱- برای تعیین علامت $y - k$ که بازاا x بینهایت بسمت صفر میل میکند میتوان از بسط محدود $y - k$ بر حسب قوای $\frac{1}{x}$ استفاده نمود.

۳- چنانکه بازاا x بینهایت y بینهایت شود. بترتیب سه موضوع امتداد مجانب مجانب و وضعیت منحنی نسبت به مجانب را بررسی مینمائیم.

امتداد مجانب - نقطه $M(x, y)$ را روی منحنی گرفته نسبت $\frac{y}{x}$ ضریب زاویه خط OM را تشکیل میدهیم چنانکه x بسمت بینهایت میل کند چند حالت ممکن است اتفاق افتد:

اگر نسبت $\frac{y}{x}$ بسمت هیچ حدی میل نکرده و بینهایت هم نشود شاخه مربوطه دارای امتداد مجانب نخواهد بود.

چنانکه $\frac{y}{x}$ بینهایت شود امتداد Oy امتداد مجانب بوده و چون x بینهایت میشود خط موازی Oy که از M مرور کرده باشد به بینهایت خواهد رفت در اینحال M شاخه شلجمی شکلی را میپیماید.

چنانکه $\frac{y}{x}$ بسمت صفر میل کند امتداد Ox امتداد مجانب بوده و چون y بینهایت میشود خط موازی این امتداد که از M گذشته باشد به بینهایت خواهد رفت پس شاخه منحنی شلجمی شکل است.

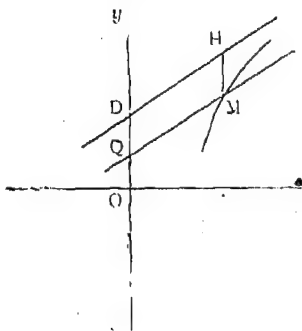
و بالاخره چنانکه $\frac{y}{x}$ بسمت c مخالف صفر میل نماید شاخه بینهایت مربوطه دارای امتداد مجانبی بضریب زاویه c خواهد بود.

مجانِب - چنانکه $\frac{y}{x}$ بسمت $\neq 0$ میل نماید معادله خطیکه از نقطه $M(x, y)$ منحنی گذشته و باین ضریب زاویه باشد نوشته وضعیت حد این خط را بازاء x بینهایت بررسی مینمائیم. معادله این خط:

$$Y - y = c(X - x)$$

بوده و محور Oy را در نقطه Q بعرض $Q = y - cx$ قطع مینماید. برای تعیین وضعیت حد این خط کافی است حد این مقدار را که عرض از مبدا خط نامیده میشود تعیین نمائیم.

چنانکه $y - cx$ بینهایت شود شاخه منحنی شلجمی شکل است.



چنانکه $y - cx$ بسمت حد d میل نماید خط MQ بسمت A بمعادله:

$$Y = cX + d$$

میل نموده این خط مجانب شاخه منحنی خواهد بود.

و بالاخره ممکن است که شاخه منحنی مجانب نداشته و شلجمی شکل هم نباشد و این در حالتی است که $y - cx$ بسمت هیچ حدی

میل نکرده و بینهایت هم نباشد مثلاً در باره منحنی $y = x - \sin x$ این حالت پیش خواهد آمد.

وضعیت شاخه منحنی نسبت به مجانب-II را نقطه برخورد مجانب A با خطیکه از M بموازات Oy کشیده ایم فرض نموده مقدار $HM = y - cx - d$ میباشد برای تعیین وضعیت منحنی نسبت به مجانبش علامت این مقدار را که بازاء $x = \infty$ صفر میشود تعیین مینمائیم.

چنانکه $y - cx$ بازاء مقادیر مثبت و همچنین بازاء مقادیر منفی x که بسمت ∞ میل میکنند بسمت همان حد d میل کند منحنی دارای دو شاخه بینهایت مجانب به A بوده یکی از آنها در راست و دیگری در چپ این خط واقع میباشند.

پس دستورات بالا را بدینطریق خلاصه میکنیم :

چنانکه $\frac{y}{x}$ بازاء x بینهایت بسمت c میل کند ، ضریب زاویه امتداد مجانب خواهد بود .

چنانکه $y - cx$ بازاء x بینهایت بسمت d میل کند خط : $Y = cx + d$ مجانب منحنی میباشد .

برای تعیین وضعیت منحنی نسبت بمجانب علامت $y - cx - d$ را بازاء مقادیر بزرگ x تعیین میکنیم . علامت این مقدار وضعیت منحنی را نسبت بمجانبش بجا خواهد داد .

حالت مخصوص - بر حسب آنچه که دیدیم چنانکه $M(x, y)$ يك شاخه بینهایت منحنی که مجانب بخط A بمعادله : $Y = cx + d$ باشد بیسمايد y را میتوان بصورت : $y = cx + d + \varphi(x)$ که در آن $\varphi(x)$ بازاء $x = \infty$ صفر میشود نوشت .

و برعکس چنانکه بتوانیم y منحنی را بصورت فوق بنویسیم چنانچه H را نقطه بطول x از خط A بمعادله : $Y = cx + d$ فرض کنیم $HM = y - cx - d$ میشود . این مقدار بازاء $x = \infty$ بسمت صفر میل نموده و در نتیجه فاصله نقطه M از خط A که منتهی مساوی HM است بسمت صفر میل خواهد نمود . و از آنجا شاخه منحنی مجانب A خواهد بود .

پس از آنجا نتیجه میشود که هر گاه بتوان معادله منحنی را بصورت :

$y = cx + d + \frac{a_0}{x^p} + \frac{t}{x^p}$ نوشت بدون محاسبه معادله مجانب و وضعیت منحنی را نسبت بمجانب خواهیم داشت .

و بطور کلی چنانکه بتوان معادله منحنی را بصورت :

$$y = \delta_0 x^h + \delta_1 x^{h-1} + \dots + \delta_h + \frac{a_0}{x^p} + \frac{t}{x^p}$$

نوشت بطوریکه ε بینهایت كوچك با $\frac{1}{x}$ باشد منحنی $Y = \delta_0 x^h + \dots + \delta_h$

را بجانب منحنی مفروض نامند زیرا که $Y - y$ دو منحنی با بینهایت شدن x صفر خواهد شد.

رسم منحنی که معادله آن بصورت $y = f(x)$ داده شده باشد.

۱۴۴- برای رسم چنین منحنی دستورات زیر را بترتیب باید اجرا نمود:

۱- با استفاده از متناوب بودن تابع $f(x)$ در صورتیکه تابع تناوبی باشد فاصله لازم جهت تغییرات x را بدست میآوریم این فاصله باید طوری باشد که با تغییر x در آن تمام منحنی رسم شود. مقادیر x را که بازاء آنها تابع پیوسته نبوده یا مشخص نباشد نیز معلوم میکنیم.

۲- مقادیر تابع را بازاء این نقاط حساب میکنیم. نقاط برخورد منحنی با محور ها را در صورتیکه اشکال نداشته باشد معلوم میکنیم.

۳- شاخه های بینهایت منحنی و بجانبها را بررسی میکنیم. پس از بدست آوردن این نتایج میتوان منحنی را تقریباً رسم نمود.

۴- برای بدست آوردن شکل منحنی بصورت دقیقتر باید تغییرات تابع $f(x)$ را بازاء مقادیر x بررسی نمود و بخصوص مقادیر ماکزیمم و می نیمم تابع را باید بدست آورد.

۵- چنانچه بررسی علامت $f'(x)$ اشکال نداشته باشد نقاط عطف و سمت تقعر منحنی را باید تعیین نمود.

باید یاد آورد که در حالاتیکه $f''(x)$ بصورت ساده درآید بررسی تقعر منحنی وضعیت منحنی نسبت بمجانبش را معلوم مینماید.

تبصره - در بعضی حالات رسم منحنیات کمکی راهنمایی بزرگی در رسم منحنی

مینماید مثلاً در صورتیکه معادله منحنی بصورت: $y = f(x) + g(x)$ نوشته

شود چنانچه منحنی $f(x)$ را رسم نمائیم با اضافه مقادیر $g(x)$ و بعرض نقاط آن منحنی مطلوب را خواهیم داشت.

۴- رسم منحنی که معادله آن بصورت پارامتری داده شده باشد .

۱۴۵- نقاط مضاعف - نقاط مکرر - منحنی C که مختصات یکی از نقاط آن بر حسب پارامتر t بصورت :

$$(1) \quad x = f(t) \quad y = g(t)$$

داده شده است فرض کرده چنانکه بازاء دو مقدار مختلف t_1 و t_2 بستگی های :

$$(2) \quad f(t_1) = f(t_2) \quad g(t_1) = g(t_2)$$

برقرار باشند نقطه $M(t)$ بازاء دو مقدار t_1 و t_2 از يك نقطه A مرور کرده و دوشاخه منحنی از این نقطه خواهند گذشت گویند چنین نقطه نقطه مضاعف میباشد . تعیین این نقاط از حل دستگاه (۲) بدست آمده و بطور کلی گویند A نقطه مکرر میباشد چنانکه M بازاء مقادیر مختلف t_1, t_2, \dots, t_m از همان نقطه A بگذرد .

۱۴۶- شاخه های بینهایت - ممکن است نقطه (x, y) بازاء مقادیر بینهایت t و همچنین بازاء مقادیر مشخص t بسمت بینهایت دور شود . و چون بررسی این مطلب در هر دو حالت یکسان است از اینجا جهت فرض میکنیم که چون t بسمت ∞ میل کند :
اولاً فقط یکی از مختصات بینهایت شود - فرض کنیم که مثلاً وقتی که t بسمت ∞ میل میکند y بینهایت شده و x بسمت α میل نماید نقطه (x, y) شاخه منحنی بجانب بخط A بمعادله : $X - \alpha = 0$ را پیموده و برای تعیین وضعیت منحنی نسبت بمجانب باید علامتیکه با آن y بینهایت و همچنین علامتیکه با آن $x - \alpha$ صفر میشود وقتی که t بازاء مقادیر کوچکتر و یا بزرگتر از ∞ بسمت ∞ میل میکند تعیین نمائیم .

چنانکه t بسمت ∞ میل کند x بسمت بینهایت و y بسمت β میل نمایند شاخه منحنی بجانب بخط : $Y - \beta = 0$ خواهد شد .

برای تعیین وضعیت منحنی نسبت بمجانبش علامتیکه با آن x بینهایت شده و $\beta - y$ صفر میشود وقتی که t بسمت ∞ بازاء مقادیر بزرگتر و یا کوچکتر از این عدد میل کند تعیین مینمائیم .

تبصره - فرض کنیم که چنانچه x بسمت α میل کند y بینهایت شده ولی x بسمت حدی میل ننماید. در اینحال نسبت $\frac{y}{x}$ بینهایت شده و امتداد Oy امتداد مجانب مییابد. و چون بنا بر فرض x دارای حدی نبوده و بینهایت هم نمیباشد خط موازی Oy که از نقطه $\Pi(x, y)$ رسم شده باشد دارای حدی نبوده و در نتیجه شاخه مربوطه دارای مجانب نمیباشد.

ثانیاً هر دو مختصات بینهایت میشوند - در اینحال همانطور که در پیش گفتیم باید $\frac{y}{x}$ را حساب نمود: اگر $\frac{y}{x}$ بسمت صفر میل کند امتداد Ox امتداد مجانب بوده و چون y بینهایت میشود شاخه مربوطه شلجمی شکل است. اگر $\frac{y}{x}$ بینهایت شود امتداد Oy امتداد مجانب بوده و چون x بینهایت میشود باز شاخه مربوطه شلجمی شکل است چنانکه $\frac{y}{x}$ بسمت c میل نماید امتدادیکه ضرب زاویه آن c است امتداد مجانب خواهد بود. در اینحال حد $x - c$ را حساب مینمائیم. اگر حد آن بینهایت شود شاخه شلجمی شکل و اگر بسمت d میل کند خط A بمعادله: $Y = cX + d$ مجانب خواهد بود. برای تعیین وضعیت منحنی نسبت بمجانبش علامتیکه با آن یکی از مختصات مثلاً x بینهایت شده و علامتیکه با آن مقدار $d - c x - y$ صفر میشود وقتیکه x بازاء مقادیر بزرگتر و یا کوچکتر از c بسمت این عدد میل نماید تعیین مینمائیم. علامت x انتهای مجانب که در آن شاخه منحنی واقع است و علامت $d - c x - y$ سمتیکه منحنی نسبت به جانب قرار دارد معلوم مینمایند.

۱۴۷ - طریقه رسم منحنی که بصورت پارامتری تعیین شده باشد.

۱ - فاصله کافی که با تغییر پارامتر در آن تمام منحنی را داشته باشیم معلوم میکنیم. و بخصوص چنانکه پارامتر t توسط خطوط مثلثاتی داده شده باشد کوچکترین دوره تناوب مشترك این توابع یعنی کوچکترین عدد مثبت P بطوریکه:

$$f(t+P) = f(t) \quad \text{و} \quad g(t+P) = g(t)$$

باشند تعیین مینمائیم. چنانکه مثلاً ضرایب t که در این خطوط مثلثاتی هستند

کسور $\frac{p}{q}$ و $\frac{p'}{q}$ و ... باشند اگر M را کوچکترین مضرب مشترک مخرجهای آنها یعنی q, q', \dots فرض کنیم $2\pi M$ دوره تناوب مشترک توابع f و g خواهد بود. در اینجا باید همیشه بررسی نمود که آیا میتوان جزء صحیحی از این دوره تناوب مثلاً πM را دوره تناوب گرفت یا خیر.

پس از تعیین P کافی است t را برای بدست آوردن تمام منحنی در فاصله غیر مشخص بدامنه P مثلاً $(\alpha, \alpha + P)$ تغییر دهیم.

تصویر - چنانکه با تغییر t به $t + P$ تابع $f(t)$ به $f(t) + x_0$ و $g(t)$ به $g(t) + y_0$ که در آنها x_0 و y_0 مقادیر ثابتند تغییر یابند برای بدست آوردن منحنی در فاصله $(\alpha + P, \alpha + 2P)$ کافی است که قوس مربوط به $(\alpha, \alpha + P)$ را انتقالی بمؤلفه های (x_0, y_0) بدهیم. این مطلب مثلاً در مورد سیکلوئید پیش میآید.

۲- باید حتی الامکان با استفاده از تقارن منحنی فاصله لازم را کم نمود. چنانکه بازاء هر مقدار t این فاصله بتوان مقدار دیگر t' را پیدا نمود بطوریکه نقاط مربوط باین دو پارامتر M و M' نسبت بیک خط یا یک نقطه قرینه باشند منحنی مزبور نسبت باین خط یا این نقطه قرینه خواهد بود.

و بخصوص چنانکه بازاء مقادیر t و t' : $f(t') = f(t)$ و $g(t') = -g(t)$

باشد O, x محور تقارن

و چنانکه : $f(t') = -f(t)$ و $g(t') = g(t)$ باشد O, y محور تقارن

و چنانکه : $f(t') = -f(t)$ و $g(t') = -g(t)$ باشد مبداء مختصات نقطه تقارن

و چنانکه : $f(t') = g(t)$ و $g(t') = f(t)$ باشد نیمساز اول محور تقارن

و چنانکه : $f(t') = -g(t)$ و $g(t') = -f(t)$ باشد نیمساز دوم محور تقارن

خواهند بود. حالانیکه بیشتر پیش میآیند در زیر بررسی مینمائیم :

چنانکه : $t' = \frac{P}{q} + t$ باشد کافی است t را در فاصله بدامنه $\frac{P}{q}$ مثلاً

$(\alpha, \alpha + \frac{P}{q})$ تغییر داده وبعد قسمت مربوط بفاصله $(\alpha + \frac{P}{q}, \alpha + P)$ را

توسط تقارن مربوطه تکمیل نمائیم.

چنانکه: $r = a - r'$ که در آن a مقدار ثابتی است باشد فاصله مطلوب را طوری انتخاب میکنیم که $\frac{a}{r}$ وسط آن واقع باشد چنانچه P دامنه این فاصله فرض شود فاصله $(\frac{a}{r} + \frac{P}{r})$ و $(\frac{a}{r} - \frac{P}{r})$ بدو فاصله $(\frac{a}{r})$ و $(\frac{a}{r} + \frac{P}{r})$ و $(\frac{a}{r} - \frac{P}{r})$ تجزیه شده و چون یکی از آنها بوسیله تقارن مربوطه از دیگری نتیجه میشود کافی است که منحنی را در هر يك از دو فاصله اخیر رسم کرده و بعد منحنی را توسط تقارن تکمیل نماییم. و مثلاً اگر $r = -r'$ باشد کافی است منحنی را در فاصله $(\frac{a}{r})$ رسم نماییم.

۳- پس از تعیین فاصله تغییرات لازم این فاصله را بفواصل جزئی که در آنها توابع r و r' مشخص و پیوسته باشند تجزیه نموده مقادیر این توابع را بازاء r که بسمت حدود این فواصل میل کند و همچنین در صورت لزوم بازاء $r = \infty$ حساب میکنیم. سپس بررسی شاخه های بینهایت میپردازیم بعد از آن تمام اطلاعات که ممکن است از روی توابع r و r' بدست آورد (علامت r و r' و نقاط برخورد با محورها و غیره) را و همچنین نقطه برخورد منحنی با مجانبها را در صورتیکه با آسانی بدست آیند یاد داشت میکنیم.

بیشتر اوقات با بدست آوردن آنچه که تا بحال گفته شد ممکن است منحنی را رسم نمود.

۴- برای رسم منحنی با دقت بیشتر باید تغییرات توابع r و r' را بررسی نمود. و در حالتیکه نقاط مضاعفی بنظر میرسد باید آنها را تعیین نمود.

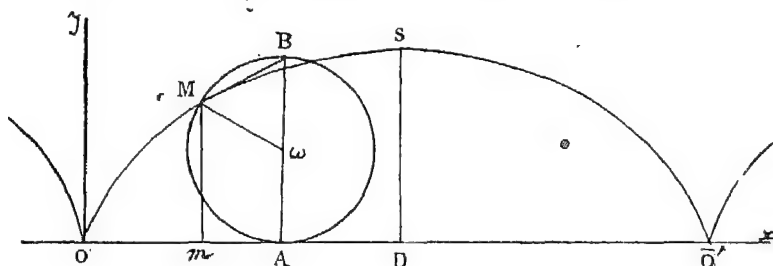
۵- در صورتیکه توابع $r(x)$ و $r'(x)$ اجازه دهند تغییر منحنی را باید بررسی کرد. و همانطور که در مورد منحنیات $(x) = r$ گفتیم این بررسی ممکن است وضعیت منحنی نسبت به مجانبها را بمانده دهد.

مثال - سیکلوئید - منحنی حاصل از حرکت نقطه M يك دایره، چنانکه آن دایره بدون سر خوردن در روی يك خط ثابتی دور بزند سیکلوئید نامیده میشود.

خط ثابت را محور Ox و امتداد حرکت را امتداد مثبت آن و مبدا مختصات را یکی از نقاط Ox که در حین حرکت دایره منطبق بر M باشد فرض می‌کنیم. محور Oy را در همان سمت دایره نسبت به Ox راست‌دار کرده و a را شعاع دایره می‌گیریم.

مرکز ω دایره را به A و M وصل کرده و یادآور می‌شویم که حرکت این شعاع در جهت عکس می‌باشد.

زاویه $(\omega M, \omega A)$ را پارامتر t گرفته و مختصات M را نسبت به آن مینویسیم.



ش ۴۴

بدین منظور دوره ωM را روی Ox و Oy تصویر می‌کنیم.

$$(۱) \quad x = \overline{OA} + a \cos(\omega M, Ox) \quad y = a + a \cos(\omega M, Oy)$$

چون دایره بدون سر خوردن روی Ox می‌چرخد پس طول OA مساوی قوس

AM یعنی Rt خواهد بود.

$$\text{از طرفی: } (\omega M, Ox) = (Oy', Ox) - (Oy', \omega M) + 2\pi = \frac{\pi}{2} + t + 2\pi$$

$$(\omega M, Oy) = (Oy', Oy) - (Oy', \omega M) + 2\pi = \pi + t + 2\pi$$

$$\text{بوده و از آنجا: } \cos(\omega M, Oy) = -\cos t, \quad \cos(\omega M, Ox) = -\sin t$$

می‌باشند. چنانکه در فرمولهای (۱) مقادیرشان را قرار دهیم دستگاه:

$$(۲) \quad x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

که نمایش سیکلوئید را میدهد خواهیم داشت.

چنانکه دیده میشود توابع x و y پیوسته و مشخص بوده و چنانکه به t نموی

مسواى 2π بدهيم y تغيير نكرده و به x باندازه $2\pi\alpha$ اضافه خواهد شد. از آنجا نتيجه ميشود كه سيكلويد از بينايت قوس مساوى كه همگى از يكى از آنها توسط يك انتقال موازى Ox و مساوى $2\pi\alpha$ نتيجه ميشود تشكيل شده است. اين نتيجه از تعريف هندسى منحنى نيز واضح ميباشد. جدول تغييرات توابع x و y در حاليكه t بين $(0, 2\pi)$ تغيير نمايد بصورت زير ميباشد.

t	•	π	2π	چنانکه نقاط (x, y)
x'	•	+	2α	•
x	•	\nearrow	$\pi\alpha$	\nearrow
y'	•	+	•	-
y	•	\nearrow	2α	\searrow

$x' = 2\pi\alpha - x$
 $y' = y$

نتیجه میشود که :

$$x' = 2\pi\alpha - x \quad y' = y$$

پس از آنجا خط SD بمعادله $x = \pi\alpha$ محور تقارن منحنى خواهد بود.

ضريب زاويه مماس در يك نقطه $\frac{y'}{x'} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \cotg \frac{t}{2}$ بوده

و از آنجا نتيجه ميشود كه مماس در نقاط O و M موازى y ميباشد در هر نقطه M غير مشخص زاويه (MA, M) مساوى t بوده و زاويه (BM, B) و يا مساوى آن (MB, O) مساوى $\frac{t}{2}$ خواهد بود. پس از آنجا زاويه (OM, MB) مساوى $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ بوده و يا آنكه ضريب زاويه MB مساوى $\cotg \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right) = \tg \frac{t}{2}$ خواهد شد. در نتيجه MB مطابق بر مماس در M ميباشد. پس از آنچه گفته شد نتيجه ميشود كه مماس در يك نقطه M سيكلويد از نقطه B كه با A روى يك قطر دايره قرار دارند ميگذرد.

تعريف - خمهاي اونيكورسال - در بين خمهاي جبرى يك طبقه مخصوص يافت ميشود كه خمهاي اونيكورسال ناميده شده و داراي تعريف زير ميباشند.
هر منحنى كه مختصات x و y آنرا بتوان بر حسب تابع منطقي از يك پارامتر t نوشت اونيكورسال ميباشد.

قضیه - هر منحنی اونیگورسال يك منحنی جبری است .

زیرا چنانکه پارامتر t را بین مختصات این خمها حذف کنیم رابطه جبری بین x و y خواهیم داشت .

۴- رسم منحنی که معادله آن تابع ضمنی از x و y باشد .

۱۴۸- شاخه های بینهایت منحنی جبری که معادله آن بصورت تابع ضمنی داده شده باشد

اعتداد بجانب - منحنی C را جبری و از مرتبه n بمعادله: $\varphi(x, y) = 0$ (۱) فرض کرده این تابع کامل و از درجه n بوده و آنرا بر حسب قوای نزولی بصورت:

$$\varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) + \dots + \varphi_1(x, y) + \varphi_0$$

مینویسیم . φ_0 مقدار ثابت و $\varphi_n(x, y)$ مجموع جملات درجه n خواهند بود . چنانچه نقطه M منحنی به بینهایت رود و شاخه را که میپیماید دارای اعتداد بجانب ΔO باشد خط OM در حد بسمت ΔO میل خواهد نمود .

α, β را کوسینوسهای هادی OM گرفته مختصات M $x = \alpha \rho, y = \beta \rho$ در معادله منحنی صدق مینمایند و از آنجا:

$$(۲) \quad \rho^n \varphi_n(\alpha, \beta) + \rho^{n-1} \varphi_{n-1}(\alpha, \beta) + \dots + \rho \varphi_1(\alpha, \beta) + \varphi_0 = 0$$

خواهد بود . پس از تفسیم طرفین بر ρ^n و ملاحظه آنکه $\frac{1}{\rho}$ بازاء M در بینهایت صفر میشود و α, β بسمت β_1, α_1 کوسینوسهای هادی ΔO میل میکنند

$\varphi_n(\alpha_1, \beta_1) = 0$ شده و از آنجا نتیجه میشود که مختصات هر نقطه ΔO در رابطه $\varphi_n(x, y) = 0$ (۳) صدق میکنند .

و برعکس Δ را یکی از خطوط دسته که توسط (۳) نمایش داده شده فرض کرده α_1, β_1 را کوسینوسهای هادی آن میگیریم . خط Δ را توسط کوسینوسهای هادیش α, β فرض کرده مختصات نقاط برخورد Δ و C بصورت α, β که در آن ρ يك ریشه معادله (۲) است نوشته میشوند چنانکه α و β بسمت α_1 و β_1 میل کنند $\varphi_n(\alpha_1, \beta_1)$ بسمت $\varphi_n(\alpha, \beta)$ که صفر میباشد میل کرده و لااقل یکی از ریشه های معادله (۲) بینهایت میشود و از آنجا یکی از نقاط برخورد خط Δ و C به بینهایت

خواهد رفت و در نتیجه ثابت میشود که Δ امتداد مجانب C میباشد. دستور زیر از آنچه که گفته شد بدست میآید.

دستور - برای بدست آوردن معادله دسته خط امتداد های مجانب خم جبری C کافی است مجموع جملات بزرگترین درجه (x, y) را مساوی صفر قرار دهیم. همچنین باید یادآور شد که معادله (۳) از قرار دادن $T=0$ در معادله همگن C بدست میآید.

چنانکه $p_n(x, y)$ را بعوامل درجه اول تجزیه نموده و مثلاً $(\delta x - \alpha y)$ معادله $O\Delta$ باشد این امتداد مجانب را ساده، مضاعف و یا از مرتبه m گویند بر حسب آنکه $p_n(x, y)$ بخش پذیر بر $(\delta x - \alpha y)$ یا بر قوه دوم و یا قوه m این جمله باشد. و یا بزبان دیگر امتداد مجانب Δ از مرتبه m است چنانچه خط بینهایت خم C را در m نقطه منطبق بر نقطه بینهایت این امتداد قطع نماید.

نتیجه - اگر $p_n(x, y)$ مقدار x را در فاکتور داشته باشد Oy امتداد مجانب خواهد بود. ضریب زاویه های امتداد های مجانب ریشه های معادله $p_n(1, t) = 0$ میباشد.

بررسی شاخه بینهایت مربوط بیک امتداد مجانب

۱ - امتداد مجانب، امتداد یکی از محور های مختصات است.

فرض کنیم Oy امتداد مجانب باشد پس $p_n(x, y)$ دارای x در فاکتور است و معادله در اینحال بصورت:

$$(4) \quad y^{n-p} g_0(x) + y^{n-p-1} g_1(x) + \dots + g_{n-p}(x) = 0$$

نوشته میشود. اگر $X = \alpha$ معادله مجانب باشد چنانکه $M(x, y)$ روی شاخه

مربوطه به بینهایت رود x بسمت α میل کرده $\frac{1}{y}$ بسمت صفر و طرف اول معادله:

$$(5) \quad g_0(x) + \frac{1}{y} g_1(x) + \dots + \frac{1}{y^{n-p}} g_{n-p}(x) = 0$$

بسمت $g_0(\alpha) = 0$ میل خواهند کرد پس از آنجا نتیجه میشود که: $g_0(\alpha) = 0$ است.

پس آنچه که گفته شد با دستور زیر خلاصه میکنیم:

دستور - چنانکه Oy امتداد مجانب باشد معادله دسته خط مجانبهای موازی Oy

از صفر کردن ضریب بزرگترین درجه y در معادله $(x, y) = 0$ بدست میآید.

دستور دیگر نظیر آنرا میتوان برای مجانبهای موازی Ox بیان نمود.
تبصره - a را ریشه ساده و حقیقی (x) فرض کرده چنانچه y بینهایت شود فقط یکی از ریشه های x معادله (۵) بسمت a میل خواهد کرد. این ریشه حتماً حقیقی بوده و از آنجا نتیجه میشود که در چنین حالت شاخه منحنی (C) مجانب بخط $x = a$ حقیقی بوده و بخصوص این وضعیت موقعیکه Oy امتداد مجانب ساده خم C باشد اتفاق میافتد.

وضعیت منحنی نسبت به مجانب - خط $x = a$ را معادله مجانب موازی Oy گرفته اگر نقطه $M(x, y)$ به بینهایت رود با قراردادن

$$(۶) \quad x = a + x_1 \quad y = \frac{1}{y_1}$$

مقادیر x_1 و y_1 بسمت صفر میل خواهند کرد. چنانکه در معادله منحنی تبدیل (۶) را بنمائیم معادله حاصل $f(x_1, y_1) = 0$ شده و طرف اول آن بازاء $x_1 = 0$ و $y_1 = 0$ صفر خواهد شد. پس برای بررسی وضعیت منحنی نسبت به مجانب کافی است چنانکه یکی از متغیرهای x_1 و یا y_1 بسمت صفر میل کند علامت متغیر دیگر را که آن نیز بسمت صفر میل میکند تعیین نمائیم.

مرتبۀ نقطه واقع در بینهایت - طبق معادله (۴) هر خط موازی y ، منحنی را در $m - n$ نقطه در فاصله نزدیک و از آنجا در m نقطه واقع در بینهایت قطع مینماید پس از آنجا نقطه بینهایت واقع در امتداد Oy برای منحنی از مرتبۀ m خواهد بود.

۴- امتداد مجانب موازی یکی از محورها نمیباشد - c را یکی از ریشه های حقیقی مخالف صفر $\varphi_n(1, c)$ و $M(x, y)$ را نقطه واقع روی شاخه بینهایت C که دارای امتداد مجانبی بضریب زاویه c میباشد فرض کرده برای پیدا کردن خود مجانب حد $y - cx = \delta$ را وقتی که x بینهایت میشود پیدا میکنیم بدین منظور در معادله $f(x, y) = 0$ بجای y مساوی $cx + \delta$ را گذارده و چون $\varphi_n(x, y)$ جمله $(y - cx)$ را در فاکتور دارد بصورت:

$$\varphi_n(x, y) \equiv (y - cx) \psi(x, y)$$

نوشته میشود. و چون بجای y مقدارش

را قرار دهیم ضریب x در $\varphi_n(x, y)$ منتها مساوی n بوده و در جملات بعدی مثلاً $\varphi_{n-1}(x, y)$ توان x کمتر از n بوده و معادله حاصل:

$$(۷) \quad x^{n-p} g_0(\delta) + x^{n-p-1} g_1(\delta) + \dots + g_{n-p}(\delta) = 0$$

نوشته خواهد شد چون طرفین این معادله را بر x^{n-p} بخش کرده و x را مساوی بینهایت کنیم مقادیر δ ریشه‌های $g_0(\delta)$ خواهند بود. و برعکس اگر α ریشه $g_0(\delta)$ باشد چنانکه δ بسمت α میل کند یک ریشه x معادله (۷) بینهایت خواهد شد. پس دستور زیر نتیجه میشود:

دستور - ضریب زاویه مجانب یک خم جبری را c فرض کرده عرض از مبدا این مجانب ریشه‌های ضریب بزرگترین قوه x در معادله حاصل از معادله منحنی پس از قرار دادن $\delta = cx + \alpha$ در آن خواهد بود.

تبصره - چنانکه c ضریب زاویه یک امتداد مجانب ساده و حقیقی باشد $g_0(\delta)$ نیز دارای یک ریشه ساده و حقیقی بوده و یک شاخه ساده و حقیقی منحنی مجانب بخط Δ خواهد بود.

وضعیت منحنی نسبت به مجانب - برای بررسی وضعیت منحنی نسبت به یک مجانب حقیقی بمعادله: $Y = cX + \alpha$ باید علامت $y - cx - \alpha$ را بررسی نمود. این مقدار وقتی که M بینهایت رود صفر شده و چون $\delta = y - cx$ بر حسب x از معادله (۷) بدست می‌آید میتوان تبدیلات:

$$x = \frac{1}{x_1}, \quad \delta = \alpha + y_1$$

را در معادله نموده و بهمان ترتیب که پیش در موردیکه امتداد مجانب موازی یکی از محورها میبود عمل نماییم.

همچنین میتوان در موردیکه فقط یکی از ریشه‌های x معادله (۷) بینهایت میشود ملاحظه کرد که بازاء δ نزدیک به α این ریشه همان علامت مجموع ریشه‌ها را داشته و یا آنکه علامت $\frac{-g_1(\alpha)}{g_0'(\delta)}$ را خواهد داشت.

مرتبه نقطه واقع در بینهایت = معادله (۷) را میتوان معادله x های نقاط مشترك خم C و خط Δ بمعادله: $y = cx + d$ دانست. چنانکه Δ غیر مشخص باشد تعداد $m - n$ از این نقاط در فاصله نزدیک بوده و در نتیجه مرتبه نقطه بینهایت m خواهد بود. و از آنجا میجانبهای مربوطه خطوطی خواهند بود که ضریب زاویه c داشته و منحنی C را در لااقل $m + 1$ نقطه واقع در بینهایت قطع مینمایند.

شاخه های شلجمی شکل - m را مرتبه نقطه c واقع در بینهایت در امتدادی بضریب زاویه C فرض کرده عده نقاط مشترك خط بینهایت و خم C مساوی مرتبه q ریشه c معادله $f_n(1, x) = 0$ بوده و q لااقل مساوی m میباشد چنانکه q بزرگتر از m باشد منحنی دارای شاخه های شلجمی شکل در امتداد مجانب مربوطه خواهد بود.

۱۴۹ - طریقه رسم منحنی که معادله آن بصورت $\varphi(x, y) = 0$ مر داده

شده باشد - برای رسم چنین منحنی باید بترتیب بررسیهای زیر را بنمائیم:

۱- چنانکه منحنی جبری و از درجه n و دارای نقطه مکرر از مرتبه $n - 1$

در فاصله نزدیک باشد مبداء مختصات را بدان نقطه برده معادله حاصل بصورت:

$$f_n(x, y) + f_{n-1}(x, y) = 0$$

نوشته خواهد شد چنانکه قرار دهیم: $y = tx$ مختصات نقطه از منحنی تابع منطقی از x شده و همانطور که در رسم منحنی که معادله آن بصورت پارامتری باشد منحنی را رسم میکنیم.

و همچنین است اگر منحنی دارای نقطه مکرر از مرتبه $n - 1$ در بینهایت باشد

فرض کنیم که این نقطه در امتداد $y - cx = 0$ واقع باشد چنانکه منحنی را با خط

$y = cx + d$ قطع نماییم $n - 1$ نقطه برخورد در بینهایت و یک نقطه در فاصله

نزدیک خواهیم داشت در نتیجه چنانکه در معادله منحنی بجای y مقدار $cx + d$ را

قرار دهیم معادله درجه اولی بر حسب x بصورت: $g_1(d) + g_0(d) = 0$

داشته و از آنجا مقادیر x و y بترتیب:

$$x = -\frac{g_1(d)}{g_0(d)} \quad y = -c\frac{g_1(d)}{g_0(d)} + d$$

خواهند شد.

حال فرض کنیم منحنی از درجه n و دارای نقطه مکرر از مرتبه $n-2$ در فاصله نزدیک باشد. این نقطه را در مبدا مختصات فرض کرده خط $y = tx$ منحنی را در دو نقطه بغیر از مبدا قطع کرده و مختصات این نقاط از معادلات:

$$(1) \quad x^2 \varphi_n(1, t) + x \varphi_{n-1}(1, t) + \varphi_{n-2}(1, t) = 0$$

$$(2) \quad y = tx$$

بدست می‌آیند. شکل منحنی مطلوب از بحث در ریشه‌های معادله (۱) چنانکه از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر نماید بدست می‌آید. و همچنین است اگر منحنی از درجه n و دارای نقطه مکرر از مرتبه $n-2$ در امتداد $cx = 0$ باشد چنانکه بجای y مقدار $\delta + cx$ را در معادله قرار دهیم معادله درجه دوم:

$$x^2 g(\delta) + x g_1(\delta) + g_2(\delta) = 0$$

بدست آمده و کافی است که آنرا بر حسب δ بحث نمائیم

۲- چنانکه با هیچیک از طریق‌های بالا نتوان معادله را بصورت پارامتری نوشت معادله منحنی را نسبت به یکی از مختصات مثلاً y مرتب کرده و در معادله حاصل:

$$y^p \varphi_0(x) + y^{p-1} \varphi_1(x) + y^{p-2} \varphi_2(x) + \dots = 0$$

حقیقی بودن و علامت مقادیر y را بازاء مقادیر x که از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر میکند بررسی مینمائیم از این بحث شکل تقریبی منحنی بدست خواهد آمد.

۳- شاخه‌های بینهایت منحنی را بررسی کرده و مجانبهای مربوطه را در صورت موجود بودن مییابیم.

۴- از دستورات زیر برای ساده شدن رسم منحنی هر چه ممکن باشد باید استفاده نمود:

یکم - چنانکه با تغییر x به $-x$ و y به $-y$ معادله منحنی تغییر ننماید منحنی نسبت بمبدا مختصات قرینه است.

این قضیه واضح و در اینحال کافی است که نصف منحنی مثلاً قسمت مربوط بمقادیر مثبت x را رسم نموده و بعد منحنی را با رسم قرینه نصف اول نسبت بمبدا مختصات تکمیل نمائیم.

دوم - چنانکه با تغییر x به x - معادله منحنی تغییر ننماید منحنی نسبت به محور Oy قرینه است.

زیرا بازاء دو مقدار x مساوی و مختلف علامه دو مقدار مساوی y از معادله بدست آمده و در نتیجه بازاء هر نقطه $M(x_0, y_0)$ منحنی نقطه $M'(-x_0, y_0)$ قرینه آن نسبت به Oy خواهیم داشت. در اینحال هم کافی است که قسمتی از منحنی را بازاء مقادیر مثبت x رسم کرده و بعد قرینه آنرا نسبت به Oy برای تکمیل منحنی رسم نمائیم.

سوم - چنانکه با تغییر y به y - معادله منحنی تغییر ننماید منحنی نسبت به Ox قرینه است.

اثبات این قضیه نظیر اثبات قضیه قبل میباشد.

چهارم - چنانکه با تغییر x به y و y به x معادله منحنی تغییر ننماید منحنی نسبت به نیمساز اول قرینه است.

زیرا شرط لازم و کافی برای آنکه دو نقطه (x, y) و (x', y') نسبت به نیمساز اول قرینه باشند آنستکه $x = y'$ و $y = x'$ باشد

پنجم - چنانکه با تغییر x به $-y$ و y به $-x$ معادله تغییر ننماید منحنی مربوطه نسبت به نیمساز دوم قرینه خواهد بود.

زیرا برای آنکه دو نقطه (x, y) و (x', y') نسبت به نیمساز دوم محورها قرینه باشند بایستی $x = -y'$ و $y = -x'$ باشد.

۵ - طریقه نواحی - در بعضی حالات رسم منحنی بطریقه نواحی شکل منحنی را بزودی بما خواهد داد. چنانکه بتوانیم معادله منحنی را بصورت :

$$A B C \dots = A' B' C' \dots \quad \text{که در آن} \quad A, B, C, \dots, A', B', C', \dots$$

کثیرالجمله هائی هستند بنویسیم منحنیات $A = 0, B = 0, C = 0, \dots$ را رسم کرده نواحی از صفحه که مختصات تقاطشان دو طرف معادله بالا را مختلف -

العلامه میکنند هاشور میزنیم. واضح است که هیچیک از نقاط منحنی در این نواحی واقع نشده و فقط از نواحی که هاشور نخورده است خواهد گذشت. از طرفی منحنی از نقاط برخورد منحنی $A = 0$ با منحنیات $A' = 0$ ، $B' = 0$ ، $C' = 0$... نیز میگذرد و بدین ترتیب نقاطی چند که منحنی از آن گذشته و نواحی که در آن واقع است خواهیم داشت.



بخش دوازدهم

رسم خمهای قطبی

۱۵۰ - کلیات - در صفحه استاندارد محور $x'x$ و مبدأ O را روی آن فرض کرده گوشه قطبی نقطه M مقدار جبری گوشه θ یکی از زوایای حاصل از امتداد x' با یکی از امتداد های راستاداریکه روی OM انتخاب پذیر است میباشد . شعاع حامل M مقدار $OM = r$ بوده و این مقادیر r و θ را مختصات قطبی نقطه M نامند . این مقادیر وضعیت نقطه M را در صفحه کاملا معین مینمایند .

فاصله دو نقطه - نقاط M_1 و M_2 را بمختصات قطبی (r_1, θ_1) و (r_2, θ_2) فرض کرده فاصله این دو نقطه از بستگی هندسی :

$$\vec{M_1 M_2} = \vec{OM_2} - \vec{OM_1}$$

بدست میآید :

$$\overline{M_1 M_2}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos (\theta_2 - \theta_1)$$

چنانکه محور Oy را عمود مستقیم به Ox بگیریم دستگاه کارترین حاصل را دستگاه مربوط بدستگاه قطبی نامیده و بین آنها بستگی های :

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

برقرار میباشد .

طرز نمایش يك منحنی - برای نمایش يك منحنی در مختصات قطبی میتوان خواه یکی از مختصات آن مثلا r را بر حسب θ بصورت تابع $r = f(\theta)$ داده و یا آنکه هر دو آنها را بر حسب پارامتری مثلا t بنویسیم :

$$r = f(t) \quad \theta = g(t)$$

۱۵۱ - خط مماس - مماس در قطب - منحنی C را بمعادله قطبی

$r = r(\theta)$ (۱) فرض کرده برای آنکه این منحنی از قطب بگذرد کافی

است که بازاء يك مقدار θ تابع $r(\theta)$ مساوی صفر شود.

فرض کنیم بازاء α : $r(\alpha) = 0$ بوده چنانکه θ بسمت α میل کند نقطه M

بسمت O میل کرده و خط OM بسمت OT بمعادله $\theta = \alpha$ میل خواهد نمود.

پس از آنجا نتیجه میشود که :

چنانکه بازاء α ، $\theta = 0$ ، $r = 0$ شود منحنی از قطب گذشته و خط $\theta = \alpha$

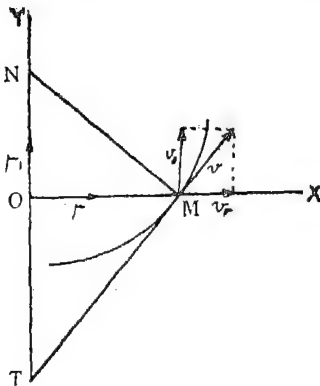
مماس بر منحنی خواهد بود.

چنانکه معادله $r(\theta) = 0$ دارای ریشه‌های مکرر باشد این معادله نمایش

دسته مماسهای شاخه‌های مختلفی که از O میگذرند خواهد داد.

مماس در يك نقطه غیر مشخص - معادله خم C را در دستگاه قطبی

بصورت پارامتری فرض کرده نقطه M را مربوط بمقدار t پارامتر میگیریم مختصات



قطبی θ و r این نقطه توابعی از پارامتر بوده

و مختصات کارترین آن :

$$(2) \quad x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

خواهند بود. چنانکه دیدیم مشتق هندسی \vec{OM}

مماس بر C بوده و چون آنرا به \vec{v} نمایش دهیم

مؤلفه‌های آن نسبت به Ox و Oy مشتقات

x' و y' میباشند. r' و θ' را مشتقات r و θ نسبت

به t فرض کرده این مؤلفه‌ها :

ش ۴۴

$$(3) \quad \begin{cases} x' = r' \cos \theta + r \theta' \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \\ y' = r' \sin \theta + r \theta' \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \end{cases}$$

خواهند بود. پس میتوان \vec{v} را مجموع هندسی دو بردار که اولی \vec{v}_1 و واقع روی Ox

که بزاویه قطبی θ است و دیگری \vec{v}_θ و واقع روی OY که عمود مستقیم به OX میباشد فرض نمود. پس طبق بستگی های (۳) مقادیر جبری r و θ

$$v_r = r' \quad , \quad v_\theta = r \theta'$$

خواهند بود زیرا این بستگی ها را میتوان دستورهای تبدیل محورهای مختصات نسبت بتصاویر بردار \vec{v} فرض نمود.

از آنجا نتیجه میشود که چنانکه V را اندازه جبری زاویه OX با مماس MT

نقطه M بگیریم: $V = (OX, MT)$ پس $tg V = \frac{r \theta'}{r'}$ خواهد شد. چنانکه θ

را پارامتر فرض کنیم یعنی منحنی بصورت: $r = f(\theta)$ داده شده باشد

$$tg V = \frac{r'}{r} \text{ میباشد.}$$

۱۵۴ - تحت مماس و تحت قائم قطبی - چنانکه OY را با زاویه قطبی

$\theta + \frac{\pi}{2}$ مرور دهیم و نقاط برخورد مماس و قائم نقطه (r, θ) را با این خط

بترتیب به T و N نمایش دهیم \overline{OT} را تحت مماس و \overline{ON} را تحت قائم نقطه M نامند.

برای بدست آوردن \overline{OT} کافی است معادله مماس را در دستگاه (O, X, Y) نوشته

$$Y = (X - r) tg V \quad \text{و یا} \quad Y = \frac{r'}{r} (X - r)$$

و در آن X را مساوی صفر کنیم. از آنجا: $\frac{1}{\overline{OT}} = \left(\frac{1}{r}\right)'$ خواهد شد.

در این فرمول متغیر زاویه θ گرفته شده است.

برای محاسبه تحت قائم بهمان ترتیب معادله قائم را نوشته و در آن $X = 0$

قرار میدهیم.

معادله قائم: $Y = -\frac{r'}{r} (X - r)$ و یا $Y = -(X - r) \cotg V$

و از آنجا مقدار \overline{ON} : $\overline{ON} = r'$ خواهد شد.

از این دستورها میتوان برای رسم خط مماس در نقطه M استفاده نموده بدین

منظور تحت مماس و یا تحت قائم را حساب کرده و مماس در نقطه M را رسم مینمائیم.

۱۵۴ - معادلات خط مماس و خط قائم - چنانکه معادله مماس نقطه

$$M(\theta, r) \text{ را در دستگاه کارتزین } OX, OY \text{ نوشته} \quad \frac{X}{OM} + \frac{Y}{OT} = 1$$

و در آن X و Y را بترتیب $\rho \cos(\omega - \theta)$ و $\rho \sin(\omega - \theta)$ قرار دهیم
معادله خط مماس در نقطه M را خواهیم داشت :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} \cos(\omega - \theta) + \left(\frac{1}{r}\right)'_{\theta} \sin(\omega - \theta)$$

در این معادله ρ و ω مختصات قطبی نقطه غیر مشخص از مماس میباشند.

بهین ترتیب معادله خط قائم نقطه M در دستگاه OX, OY :

$$\frac{X}{OM} + \frac{Y}{ON} = 1$$

بوده و چون همانطور که گفتیم عمل کنیم معادله خط قائم :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} \cos(\omega - \theta) + \frac{1}{r\theta} \sin(\omega - \theta) \text{ خواهد شد.}$$

۱۵۴ - مجانبها - نقاط بینهایت منحنی $r = r(\theta)$ نقاطی هستند که r

بازاء مقادیری از θ بینهایت شود و نیز ممکن است که بازاء $\theta = \infty$ r بینهایت شود در اینحال امتداد مجانب وجود نداشته و منحنی بینهایت مرتبه در حول قطب دوران کرده و در هر مرتبه فاصله آن از قطب زیاد تر خواهد شد چنین منحنیات را بیچ گویند.

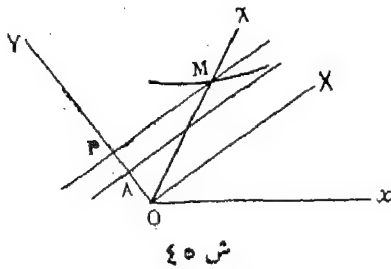
در حالت کلی که θ بسمت θ_0 میل نموده و r بینهایت شود خطیکه بزایوه

قطبی θ_0 باشد حد OM بوده و در نتیجه امتداد مجانب خواهد بود. برای بدست آوردن مجانب بدین ترتیب عمل میکنیم :

خط OX بزایوه قطبی θ_0 را امتداد مجانب فرض کرده آنرا بزایوه $+\frac{\pi}{4}$

دوران میدهم امتداد OY حاصل بزایوه قطبی $+\frac{\pi}{4} + \theta_0$ خواهد بود. خط MP را

موازی OX مرور داده بنا بتعریف حد این خط وقتی که M به بینهایت رود مجانب



میباشد. برای تعیین حد آن حد \overline{OP} را که OA فرض کرده ایم حساب میکنیم. حال \overline{OP} تصویر \vec{OM} روی OY بوده و از آنجا:

$$\overline{OP} = \overline{OM} \cdot \cos(\angle OM, OY) = r \cos(\theta_0 + \frac{\pi}{2} - \theta) = r \sin(\theta - \theta_0)$$

در نتیجه مقدار δ که تحت مجانب نامیده میشود حد مقدار $\delta = r \sin(\theta - \theta_0)$ و قتیکه θ بسمت θ میل کند خواهد بود.

برای بدست آوردن وضعیت منحنی نسبت به مجانب کافی است که علامت $\delta - \overline{AP}$ را بازنه مقادیر θ نزدیک به θ_0 حساب نمائیم. بدین منظور مقدار $\delta - \overline{AP} = \theta - \theta_0$ قرار داده و قسمت اصلی $\delta - \alpha$ را نسبت به r پیدا میکنیم و همچنین باید علامت مقدار r را که بسمت بینهایت میل میکند پیدا نمائیم و اینکار را نیز بکمک قسمت اصلی آن میتوان انجام داد.

۱۳۵ - رسم منحنی که معادله آن در مختصات قطبی داده شده باشد -
برای رسم منحنی که معادله آن بصورت: $r = r(\theta)$ داده شده باشد. عملیات زیر را باید بترتیب انجام داد.

۱ - جستجوی فاصله تغییرات θ - باید θ را در هر فاصله که تابع r در آن معین است تغییر داد ولی گاهی میتوان این فاصله را با استفاده از تقارن و یا متناوب بودن منحنی کوچک نمود در زیر دو حالت مختلف را بحث میکنیم:

حالت اول - تابع r متناوب است - مطالب زیر را باید بترتیب در نظر گرفت.
یکم - در موقعی که r تابع منطقی از خطوط مثلثاتی θ و یا مضارب θ از آن باشد میتوان بدین ترتیب فاصله لازم تغییرات را حساب نمود. چنانکه m کوچکترین مخرج مشترک مضارب θ باشد واضح است که با تغییر θ به $\theta + 2m\pi$ خطوط مثلثاتی θ و در نتیجه r تغییر نکرده و از آنجا نتیجه میشود که تابع $r(\theta)$ بردارای دوره تناوب $2m\pi$ میباشد.

و بطور کلی چنانکه دوره تناوب عدد P باشد: $f(\theta) = f(\theta + P)$

خواهد بود.

چنانکه $P = 2\pi$ و یا بطور کلی $P = 2\pi k$ با فرض آنکه k عدد صحیح است باشد زوایای قطبی θ و $\theta + P$ يك نقطه بماداده و در نتیجه بانغیر θ در هر فاصله غیر مشخص که دامنه آن P باشد مثلاً $(\alpha, \alpha + P)$ تمام منحنی را خواهیم داشت. این حالت موقعی که r تابعی از خطوط مثلثاتی θ و یا $\frac{P}{q}\theta$ باشد ... باشد پیش میآید.

چنانکه $P = 2\pi \frac{p}{n}$ بطوریکه $\frac{p}{n}$ کسر غیر ممکن التحویل باشد نقطه $M_1(\theta + P)$ از دوران بزایه P نقطه $M(\theta)$ بدست آمده و در نتیجه منحنی از n قسمت که از دوران متوالی یکی از آنها بزایه P در حول قطب بدست میآید تشکیل شده است. هر يك از این قسمتها از تغییر θ در فاصله بدامنه P بدست میآید. در حالیکه $P = \pi$ باشد دوران بتقارن نسبت بقطب تبدیل میشود.

چنانکه $P = 2\alpha\pi$ با فرض آنکه α اندازه ناپذیر باشد منحنی از بینهایت قسمت که از دورانی بزایه P در حول قطب بدست میآیند تشکیل خواهد شد.

دوم - پس از تعیین دوره تناوب P مقدار $f(\theta + \frac{P}{q})$ را تشکیل

میدهم چنانکه: $f(\theta + \frac{P}{q}) = -f(\theta)$ (۱)

باشد نقطه $M'(\theta + \frac{P}{q})$ از دوران نقطه $M(\theta)$ در حول قطب بزایه $\frac{P}{q} + \pi$ بدست آمده و از آنجا برای رسم قوس مربوط بفاصله تغییرات P کافی است θ را در فاصله نصف آن تغییر داده و بعد دوران مربوطه را انجام دهیم.

در حالت خاصیکه $P = 2\pi$ است تساوی (۱) بصورت: $f(\theta + \pi) = -f(\theta)$

در آمده دو نقطه M و M' برهم منطبق شده و برای بدست آوردن تمام منحنی کافی است θ را در فاصله π تغییر دهیم.

سوم - پس از تعیین دانه فاصله تغییرات لازم باید بررسی نمود که آیا میتوان با استفاده از تقارن نسبت به محوری این فاصله را کوچکتر نمود یا خیر. بدین منظور زاویه β را طوری تعیین میکنند که

$$(۲) \quad f(\beta - \theta) = f(\theta) \quad \text{و} \quad (۳) \quad f(\beta - \theta) = -f(\theta)$$

باشد و در عمل این زاویه را $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ انتخاب میکنند.

چنانکه بستگی (۲) برقرار باشد نقاط $M(\theta)$ و $M'(\beta - \theta)$ نسبت به محور OX که بزائویه قطبی $\frac{\beta}{2}$ مفروض است قرینه بوده و چنانکه بستگی (۳) برقرار باشد نقاط M و M' نسبت به OY عمود به OX قرینه خواهند بود.

در هر دو حال فاصله تغییرات را طوری انتخاب میکنیم که $\frac{\beta}{2}$ در وسط آن واقع باشد یعنی θ را در $(\frac{\beta}{2} - \frac{P}{2}, \frac{\beta}{2} + \frac{P}{2})$ تغییر میدهیم. این فاصله بدو فاصله $(\frac{\beta}{2} - \frac{P}{2}, \frac{\beta}{2} + \frac{P}{2})$ و $(\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2} + \frac{P}{2})$ تجزیه شده و قسمتهای منحنی مربوط باین دو فاصله نسبت به محور مربوطه قرینه خواهند بود و از آنجا نتیجه میشود که کافی است که منحنی را بازاء مقادیر θ واقع در یکی از این فواصل رسم کرده و بعد توسط تقارن مربوطه تکمیل نماییم.

حالات دوم - تابع f متناوب نمیشود - برای رسم منحنی در اینحال باید به θ تمام مقادیر را داده ولی گاهی نیز با استفاده از تقارن این فاصله را میتوان کوچکتر نمود. فرض کنیم که بتوان عددی مثلا α پیدا نمود بطوریکه یکی از بستگی های

$$(۴) \quad f(\alpha - \theta) = f(\theta) \quad (۵) \quad f(\alpha - \theta) = -f(\theta)$$

برقرار باشد. امتداد OX را بطوریکه $(\alpha, OX) = \frac{\alpha}{2}$ باشد گرفته امتداد های θ و $\alpha - \theta$ نسبت به OX قرینه خواهند بود. با فرض (۴) نقاط M و M' مربوط بزوایای قطبی θ و $\alpha - \theta$ نسبت به OX قرینه بوده و با فرض (۵) این نقاط نسبت به محور OY عمود به OX قرینه خواهند بود. در هر دو حال فاصله تغییرات را میتوان کوچک نموده و بعد توسط تقارن مربوطه منحنی را تکمیل نماییم.

۲- پس از تعیین کوچکترین فاصله، تغییرات n را بر حسب θ بررسی مینمائیم.

۳- علامت * را بررسی میکنیم. این بررسی برای تعیین سوئیکه در آن هر

شعاع حامل باید برده شود لازم میباشد.

۴- نقاط یادداشت شده و هماسه‌های آنها را تعیین میکنیم. بخصوص نقاط بینهایت

و در صورت موجود بودن مجانیها را حساب نموده و در صورت امکان وضعیت منتفی را

نسبت با آنها بررسی میکنیم. مقادیر θ که بازاء آنها γ بینهایت و یا صفر میشود در

جدول برده شده و همانطور هم که گفته شد مقادیر که را صفر میکنند زوایای

قطبی، محاس در مبداء میباشند.

و نیز باید یاد آور شد که در نقاطی که ماگزیمم و یا می نیمم است هفتضی

عمود بر شعاع حامل می باشد زیرا که در آنها صفر است.

۵- نقاطیکه بدین ترتیب بدست آمده اند توسط منحنی پیوسته بهم وصل کرده

و برای اینکار از جدول تغییرات استفاده میکنیم.

۶- هزینه‌های رسم شده را، توسط تدارک و دورانها تکمیل هزینه‌مائیم .

و بالاخره چنانچه منحنی توسط معادلات پارامتری $r = f(t)$ $\theta = g(t)$

داده شده باشد کوچکترین فاصله لازم را برای x تعیین نموده و بعد تغییرات θ و θ را

فصلیت ۵۰۴ بررسی میثمائیم .



بخش سیزدهم

یوش ها

۱۵۶ - یوش خمهای هامنی که معادله آنها بصورت تابع ضمنی داده شده باشد - خمهای C که پیرامتر α بستگی دارند فرض کرده بنا بتعریف یوش خمهای C خم E است که بر تمام خمهای C مماس باشد. معادله خمهای C را بصورت تابع ضمنی $f(x, y, \alpha) = 0$ (۱) که پیرامتر α بستگی دارد فرض کرده M را نقطه تماس C_α و یوش E بگیریم. X و Y را مختصات این نقطه فرض کرده واضح است که این مختصات توابعی از α بوده و در معادله :

$$f(X, Y, \alpha) = 0 \quad (2)$$

نیز صدق میکنند زیرا نقطه M روی C_α واقع میباشد.

حال شرط آنکه خمهای E و C_α در M دارای يك مماس باشند مینویسیم

پیرامتر های هادی مماس بر E بترتیب $\frac{dX}{d\alpha}$ و $\frac{dY}{d\alpha}$ بوده و معادله مماس بر C_α

$$(x - X)f'_X + (y - Y)f'_Y = 0 \quad (3)$$

که در آن x و y مختصات نقطه از مماس اند خواهد بود. و چون این دو مماس در نقطه M مشترکند پس شرط آنکه بر هم منطبق شوند آنستکه دارای يك امتداد بوده یعنی :

$$f'_X \frac{dX}{d\alpha} + f'_Y \frac{dY}{d\alpha} = 0 \quad (4)$$

باشد پس

توابع X و Y در معادلات (۲) و (۴) صدق کرده و چون معادله (۴) را نسبت به α دیفرانسیل بگیریم معادله

$$f'_X \frac{dX}{d\alpha} + f'_Y \frac{dY}{d\alpha} + f''_\alpha = 0 \quad (5)$$

بدست آمده و با در نظر گرفتن این معادله دیده میشود که برای آنکه معادله (۴) برقرار باشد لازم و کافی است که

$$f''_\alpha = 0 \quad (6)$$

باشد و از آنجا

نتیجه میشود که توابع X و Y از دستگاه معادلات (۲) و (۶) بدست آمده و دستور زیر را در اینحال میتوان بیان نمود :

دستور - مختصات نقاط تماس منحنی C_α با پوش خود از دو معادله که یکی معادله مفروض و دیگری مشتق آن نسبت به پارامتر باشد بدست آمده و چنانکه این دو معادله را نسبت به x و y حل کنیم معادلات پارامتری پوش و چون بین آنها پارامتر α را حذف کنیم معادله ضمنی پوش را خواهیم داشت .

تبصره - در حالیکه خمهای C خطوط مستقیم باشند معادلات پارامتری پوش با آسانی بدست خواهند آمد زیرا معادلات (۲) و (۶) در اینحال از درجه اول بر حسب x و y خواهند بود .

باید یاد آور شد که حذف پارامتر α بین معادلات (۲) و (۶) معادل بیان آنستکه معادله (۲) دارای ریشه مضاعف بر حسب α باشد و از آنجا برای بدست آوردن معادله ضمنی پوش کافی است بنویسیم که معادله مفروض دارای ریشه مضاعف نسبت به پارامتر میباشد .

۱۵۷ - نقاط حد - دو منحنی C نزدیک بهم مربوط به پارامترهای α و $\alpha + h$ را در نظر گرفته نقاط تقاطع آنها از حل دستگاه :

$$(۷) \quad f(x, y, \alpha) = 0 \quad (۸) \quad f(x, y, \alpha + h) = 0$$

بدست میآیند . حال فرض کنیم α ثابت بوده و h بسمت صفر میل نماید . منحنی $C_{\alpha+h}$ بسمت C_α میل کرده و نقاط فوق بسمت نقاطی واقع روی C_α میل خواهند کرد . این نقاط را نقاط حد و یا نقاط مشخص این منحنی نامند .

برای تعیین این نقاط نمیتوان مستقیماً h را مساوی صفر در معادله (۸) قرار داد زیرا معادله حاصل همان (۷) شده و دستگاه حاصل غیر مشخص خواهد شد . برای رفع ابهام معادله (۸) را بصورت :

$$(۹) \quad \frac{f(x, y, \alpha + h) - f(x, y, \alpha)}{h} = 0$$

نوشته و چنانکه در این معادله α را بسمت صفر میل دهیم معادله (۹) در حد

$$(۱۰) \quad f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$$

خواهد شد. در نتیجه نقاط حد از حل دستگاه (۷) و (۱۰) بدست خواهند آمد و این همان دستگاه (۲) و (۶) میباشد. پس از آنجا دیده میشود که نقاط حد هر منحنی C همان نقاط تماس این منحنی با پوش خود میباشد.

و نیز میتوان گفت که پوش دسته خمهاییکه بیک پارامتر بستگی دارند مکان نقاط حد خمهای مختلف آن دسته میباشد.

۱۵۸ - جوابهای مخصوص - باید یاد آور شد که بعضی نقاط حد ممکن است جزء پوشیکه مطابق فوق تعریف کردیم نباشند.

چنانکه منحنی C از یک یا چند نقطه ثابت بگذرد این نقاط جزء نقاط حد بوده ولی جزء پوش نخواهند بود زیرا چنانکه P یکی از این نقاط باشد این نقطه در تقاطع $C_\alpha + \alpha$ بوده و از آنجا جزء نقاط حد C_α میباشد و همچنین است وقتی که C دارای نقاط مکرر باشد.

۱۵۹ - پوش خمهاییکه معادله آن بصورت پارامتری داده شده باشد - فرض کنیم که معادلات خمهای C بصورت پارامتری :

$$(۱۱) \quad x = f(t, \alpha) \quad y = g(t, \alpha)$$

داده شده باشند. هر نقطه M واقع روی C_α مربوط به پارامتر t بوده و نقطه تماس به پارامتر t که تابعی از α میباشد مربوط خواهد بود.

چنانکه در معادلات (۱۱) t را بر حسب α قرار دهیم معادلات پارامتری پوش را داشته و پارامترهای هادی مماس بر آن :

$$(۱۲) \quad \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \quad \text{و} \quad \frac{\partial g}{\partial t} \frac{dt}{d\alpha} + \frac{\partial g}{\partial \alpha}$$

$$(۱۳) \quad \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{و} \quad \frac{\partial g}{\partial t} : C_\alpha \text{ بر مماس های هادی پارامترهای از طرفی}$$

بوده و چون شرط انطباق این دو مماس و یا شرط متناسب بودن پارامترهای هادی آنها را بنویسیم بستگی :

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial u}}{\frac{\partial g}{\partial t}}$$

$$(۱۴) \quad \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \text{و یا:}$$

بدست میآید. از این معادله t را برحسب u بدست آورده و چون مقدار آنرا در (۱۱) قرار دهیم معادلات پارامتری پوش را خواهیم داشت. میتوان همچنین u را برحسب t حساب کرده و چون آنرا در معادلات (۱۱) بگذاریم باز همان معادلات پوش را خواهیم داشت. با حذف t و u بین معادلات (۱۱) و (۱۴) معادله پوش را بصورت ضمنی بدست خواهیم آورد.

۱۶۰ - دلولوپه منحنی - تعریف - دلولوپه يك منحنی مسطحه پوش قائمهای آن منحنی میباشد.

معادله منحنی را بصورت پارامتری $x = f(t)$ $y = g(t)$ فرض کرده معادله قائم در نقطه M $(X - x)x' + (Y - y)y' = 0$ (۱۵) میباشد. برای بدست آوردن پوش آن از طرف اول این معادله نسبت به t مشتق میکنیم معادله حاصل :

$$(۱۶) \quad (X - x)x'' + (Y - y)y'' - x'^2 - y'^2 = 0$$

شده پس از حل معادلات (۱۵) و (۱۶) فرمولهای :

$$(۱۷) \quad X - x = \frac{-y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''} \quad Y - y = \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''}$$

مختصات نقطه مشخص C قائم را بما خواهند داد.

چنانکه بعداً خواهیم دید این نقطه همان مرکز خمیدگی منحنی نیز میباشد. اگر معادله منحنی بصورت $y = f(x)$ داده شده باشد چون x را پارامتر بگیریم :

$x' = 1$ و $x'' = 0$ شده در نتیجه دستور های :

$$(۱۸) \quad X - x = -\frac{y'(1 + y'^2)}{y''} \quad Y - y = \frac{1 + y'^2}{y''}$$

را برای مختصات نقطه تماس قائم با پوش خود خواهیم داشت .

مثال - دولوپه يك شلجمی - معادله شلجمی : $y^2 = 2px$ بوده قائم در نقطه M برض y دارای معادله :

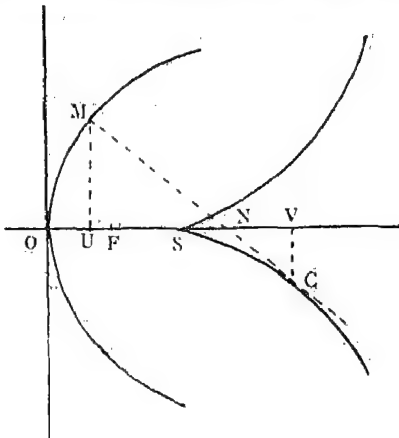
$$(۱) \quad Y - y + \left(X - \frac{y^2}{2p} \right) \frac{y}{p} = 0$$

خواهد بود . پارامتر این معادله y بوده و چون نسبت بآن مشتق گرفته و مساوی صفر قرار

$$-1 + \left(X - \frac{y^2}{2p} \right) \frac{1}{p} - \frac{y^2}{p^2} = 0 \quad \text{دهیم معادله :}$$

$$X = \frac{3y^2}{2p} + p \quad Y = -\frac{y^2}{p^2} \quad \text{را خواهیم داشت از حل این دو معادله مختصات}$$

نقطه از دولوپه بدست آمده می بینیم که $X = p + 3x$ میباشد . از اینجا قانون



ساده برای پیدا کردن نقطه مشخص خواهیم داشت زیرا : $NV = 2 \cdot OU$ خواهد بود . از حذف پارامتر y بین این معادلات معادله کارتزن دولوپه :

$$Y^2 = \frac{8}{27p} (X - p)^3$$

بدست آمده و از روی آن با آسانی شکل منتهی بدست خواهد آمد . این منتهی در S دارای نقطه بازگشت بطول p و نسبت به Ox قرینه و دارای شاخه های شلجمی شکل میباشد .

میتوان همچنین معادله کارتزن دولوپه

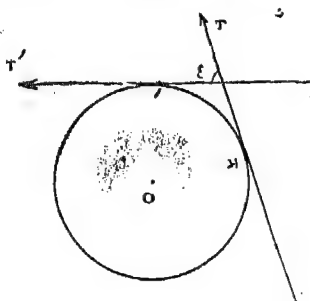
را از نوشتن شرط آنکه معادله (۱) دارای ویشه

مضاعف نسبت به y باشد بدست آورد این شرط $4p^2 + 27y^2 = 0$ میباشد .

بخش چهاردهم

خمیدگی خمهای هامنی

۱۶۱ - خمیدگی - دایره راستدار و دو نقطه M و M' روی آن فرض کرده مماسهای MT و $M'T'$ این نقاط که همسوی دایره نیز راستدار شده اند در نظر میگیریم. ϵ را اندازه زاویه برحسب رادیان بین امتداد های مثبت این مماسها گرفته



میدانیم که: $\frac{1}{R} = \frac{\epsilon}{\text{قوس } MM'}$

میباشد R شعاع دایره و قوس MM' اندازه قوس کوچکتر از نصف دایره محدود بنقاط M و M' خواهد بود.

چنانکه بجای دایره منحنی دیگر T را

ش ۴۷

داشته باشیم این تعریف باز قابل قبول بوده و در

اینحال نیز اندازه ϵ برحسب رادیان میباشد. پس از آنجا تعریف زیر را جهت خمیدگی متوسط میتوان نمود.

تعریف - خمیدگی متوسط قوس MM' نسبت $\frac{\epsilon}{\text{قوس } MM'}$ یعنی نسبت زاویه بین مماسهای نقاط M و M' بقوس MM' میباشد.

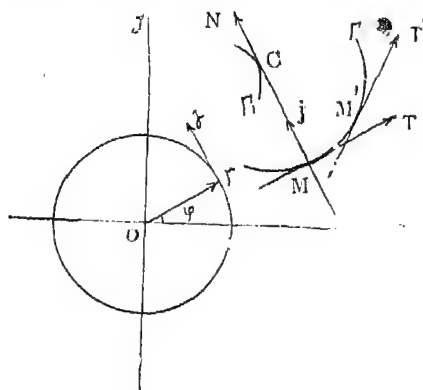
منحنی T راستدار و ϵ زاویه بین امتداد های مثبت مماسهای نقاط M و M' و برحسب رادیان خواهند بود.

منحنی T را هامنی فرض کرده چنانکه M' بسمت M میل کند حد نسبت فوق را بررسی مینمائیم. بدین منظور $s + \Delta$ را طولهای منحنی الخط نقاط M و M'

در روی منحنی راستدار Γ فرض کرده MM' قوس $|\Delta s|$ خواهد شد. چنانکه φ و $\varphi + \Delta\varphi$ گوشه‌های نیم مماسهای مثبت نقاط M و M' بامحور Ox فرض شوند
یعنی: $\varphi = (\vec{Ox}, \vec{MT})$ و $\varphi + \Delta\varphi = (\vec{Ox}, \vec{M'T'})$
از آنجا $\Delta\varphi = (\vec{MT}, \vec{M'T'})$ و $\varepsilon = \Delta\varphi$ نتیجه میشود

بس خمیدگی متوسط قوس MM' مساوی $\left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right|$ بوده و چنانکه M' بسمت M

میل نماید حد $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ مشتق $\frac{d\varphi}{ds}$ یعنی مشتق φ نسبت به s خواهد شد. پس حد خمیدگی متوسط $\left| \frac{d\varphi}{ds} \right|$ بوده و این حد را بنا برتعریف خمیدگی منحنی Γ در



ش ۴۸

نقطه M نامند.

\vec{T} را برداریکه مماس راستدار
نقطه M فرض کرده بردارهمسنگ

آنرا از مبداء مختصات $\vec{OM} = \frac{d\vec{OM}}{ds}$

میگیریم چنانکه M تغییر نماید

انتهای این بردار هودوگراف

برداریکه \vec{T} را رسم کرده و φ طول

منحنی الخط نقطه μ در روی این

هودوگراف که دایره است خواهد بود. و چنانکه پیش دیدیم $\frac{d\varphi}{ds}$ مساوی مشتق

هندسی بردار \vec{OM} نسبت پیرامتر s بوده و این مشتق هندسی برداری مماس بدایره

نیز میباشد پس از آنجا: $\vec{\mu} = \frac{d\vec{OM}}{ds}$ برداری همسنگ بردار $\frac{d^2\vec{OM}}{ds^2}$

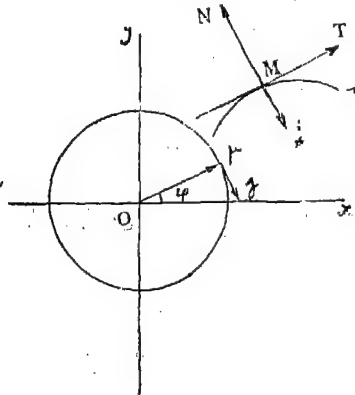
یعنی مشتق دوم \vec{OM} نسبت به s خواهد بود. و از آنجانب نتیجه زیر را میتوان بیان نمود:

قضیه - حد خمیدگی متوسط قوس MM' وقتی که M' بسمت M میل نماید

مساوی اندازه بردار $\frac{d^2\vec{OM}}{ds^2}$ یعنی مشتق هندسی دوم بردار \vec{OM} نسبت به s

خواهد بود این حد خمیدگی منحنی Γ در M نامیده میشود.

تعریف - بردار همسنگ مشتق دوم \vec{OM} نسبت بطول منحنی الخطه که از نقطه M رسم شده باشد بردار خمیدگی منحنی Γ در نقطه M نامیده میشود



$$\vec{MJ} = \frac{d^2 \vec{OM}}{ds^2}$$

امتداد بردار خمیدگی امتداد قائم در M میباشد زیرا این بردار همسنگ \vec{MJ} بوده و این بردار مماس بدایره مثلثاتی و در نتیجه عمود به مماس MT خواهد بود.

چنانکه بیننده روی Γ در سوی قوسهای صعودی حرکت کند تقعر منحنی بچپ یا بر راست اوست بر حسب آنکه زاویه قطبی φ نیم مماس

ش ۴۹

مثبت صعود نموده و یا نزول نماید. و نیز یادآور میشویم که نقاط عطف که در آنها تقعر منحنی تغییر جهت میدهد مربوط بیک ماکزیمم و یا مینیمم زاویه φ میباشد. چنانکه سوی حرکت نقطه M را روی دایره و همچنین سوی بردار \vec{MJ} را که از آن نتیجه میشود بررسی نمائیم خواهیم دید که بردار خمیدگی \vec{MJ} در همان سمت قوسهای منحنی Γ نسبت بمماس واقع شده و یا آنکه گوئیم که امتداد آن بسمت تقعر منحنی Γ در M میباشد.

حال ثابت میکنیم که بردار خمیدگی بستگی بسوی مثبت انتخاب شده روی منحنی ندارد زیرا چنانکه این سو را تغییر دهیم اولاً زاویه برخورد φ قوس MM' تغییر نکرده چون دو نیم خط MT و $M'T'$ هر دو تغییر جهت داده اند پس خمیدگی متوسط قوس MM' و از آنجا حد آن هم تغییر نکرده و در نتیجه بردار جدید دارای همان اندازه بردار قبل میباشد. ثانیاً امتداد بردار خمیدگی هم تغییر نخواهد کرد زیرا همان امتداد قائم بر منحنی میباشد. ثالثاً سوی آن نیز ثابت خواهد ماند زیرا این همان سوی تقعر منحنی خواهد بود.

۱۶۲ - شعاع خمیدگی - مرکز خمیدگی - چون خمیدگی دارای بعدی

عکس يك طول میباشد پس عکس آن بعد يك طول بوده و از آنجا تعاریف زیر را میتوان نمود :

تعریف - شعاع خمیدگی منحنی Γ در نقطه M عکس خمیدگی در آن نقطه میباشد.

مرکز خمیدگی منحنی Γ در یک نقطه M نقطه C انتهایی برداری با آغاز M بامتداد و سوی بردار خمیدگی و دارای اندازه مساوی شعاع خمیدگی میباشد.

چون $MJ = \left| \frac{ds}{d\varphi} \right|$ است پس $MC = \left| \frac{ds}{d\varphi} \right|$ خواهد بود.

در روی قائم MN سوی مثبت را سوی مربوط بزائویه قطبی $\varphi + \frac{\pi}{2}$ انتخاب کرده امتداد مثبت قائمیکه بدین ترتیب راستدار شده است عمود مستقیم به نیم مماس مثبت میباشد. امتداد مثبت مماس بدایره در نقطه μ نیز همین خواهد بود.

حال $\frac{ds}{d\varphi}$ اندازه جبری بردار $\frac{d\mu}{ds}$ روی مماس در μ بدایره بوده و از آنجا

این مقدار نیز اندازه جبری بردار خمیدگی $\frac{d\vec{OM}}{ds}$ خواهد بود. پس $\frac{ds}{d\varphi}$

نیز اندازه جبری بردار \vec{MC} میباشد. پس بطور خلاصه میتوان گفت :

تعریف - خمیدگی جبری خم Γ در M اندازه جبری بردار خمیدگی

$\vec{MJ} = \frac{d\vec{OM}}{ds}$ در روی قائم راستدار بوده و اندازه آن $\frac{ds}{d\varphi}$ میباشد.

اندازه جبری شعاع خمیدگی مساوی اندازه جبری بردار \vec{MC} در روی قائم راستدار بوده و اندازه آن $\varrho = \frac{ds}{d\varphi}$ میباشد. C مرکز خمیدگی فرض شده است.

مرکز خمیدگی خم Γ در M انجام بردار \vec{MC} که دارای اندازه جبری

$\varrho = \frac{ds}{d\varphi}$ در روی قائم راستدار است میباشد. امتداد مثبت این قائم بزائویه قطبی

$\varphi + \frac{\pi}{2}$ بوده یعنی : $\vec{MC} = \frac{ds}{d\varphi}$ خواهد بود.

چنانکه x و y مختصات نقطه M باشند مختصات X و Y مرکز خمیدگی از دستوره‌های :

$$(۱) \quad X = x + \rho \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right), \quad Y = y + \rho \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right)$$

بدست می‌آیند.

۱۶۳ - قضیه - مرکز خمیدگی يك منحنی در نقطه M نقطه تماس قائم آن

نقطه با دولوپه منحنی میباشد.

چون مختصات X و Y نقطه C مرکز خمیدگی از دستوره‌های (۱) بدست

می‌آیند پس پارامترهای هادی منحنی I_1 مکان C دیرانسیل‌های dX و dY یعنی مقادیر :

$$dX = dx + d\rho \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) + \rho \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) d\varphi$$

$$dY = dy + d\rho \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) + \rho \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) d\varphi$$

خواهند بود. و چنانکه در نظر بگیریم که :

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi}, \quad dx = ds \cos \varphi, \quad dy = ds \sin \varphi$$

میباشند پس مقادیر :

$$(۲) \quad dX = d\rho \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right), \quad dY = d\rho \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right)$$

خواهند شد. چنانکه دیده میشود مماس بر منحنی I_1 که C می‌پیماید دارای زاویه

قطبی $\varphi + \frac{\pi}{4}$ بوده یعنی امتداد آن امتداد قائم MC میباشد. پس I_1 مکان C و

دولوپه منحنی I_1 میباشد.

۱۶۴ - طول قوس دولوپه - سوی مثبت روی دولوپه را طوری انتخاب می‌کنیم

که نیم مماس مثبت نقطه C بهمان سوی نیم قائم مثبت MN که توسط زاویه $\varphi + \frac{\pi}{4}$

راستادار شده است باشد. s_1 را طول منحنی الخط نقطه C روی دولوپه ناهیده از مقایسه

فرمولهای (۲) با $dX = ds_1 \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right), \quad dY = ds_1 \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right)$

$$s_1 = \rho + C^{te} \quad \text{و یا} \quad ds_1 = d\rho \quad \text{بستگی}$$

بدست میآید. این رابطه اندازه جبری قوس دولوپه را بما خواهد داد. مثلاً:

$$\widehat{C_1 C_1} = s_1' - s_1 = \rho' - \rho = \overline{M' C_1} - \overline{M C_1}$$

بوده و از آنجا قضیه زیر را میتوان بیان نمود:

قضیه - اندازه جبری قوس $C_1 C_1$ دولوپه منحنی T مساوی نمو جبری شعاع خمیدگی منحنی اخیر میباشد.

از این قضیه میتوان بدون محاسبه يك انتگرال طول قوس دولوپه را حساب نمود ولی باید برای بکار بردن صحیح آن علامت قوسها و شعاعهای خمیدگی را بدقت بررسی کرد بخصوص چنانکه در روی قوس مربوطه يك نقطه بازگشت وجود داشته باشد

۱۶۵ - دولوپانت - میخواهیم تمام منحنیاتی که منحنی مفروضی دولوپه آنها باشد پیدا نماییم.

C را منحنی مفروض و γ را یکی از منحنیات مطلوب میگیریم. مماس در نقطه M از C قائم بر γ در نقطه μ میباشد.

چنانکه سوی مثبتی روی C انتخاب کرده و s را طول منحنی الخط M بنامیم. طبق آنچه که گفتیم

$$s = \overline{\mu M} + Cte$$

بوده و اندازه $\overrightarrow{\mu M}$ در

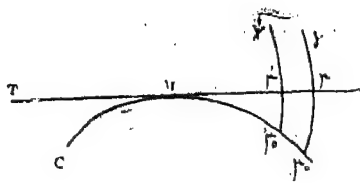
سوی نیم مماس مثبت MT میباشد. با انتخاب μ مبدأ قوسها میتوان مقدار ثابت را حذف نموده و چنین نوشت:

$$\overline{M\mu} = -s$$

پس یکی از منحنیات

مطلوب بدین ترتیب بدست میآید که در روی هر مماس MT بردار $\overrightarrow{M\mu}$ با اندازه جبری $s -$ در سوی نیم مماس مثبت برده شود. نقطه μ منحنی مطلوب را وقتی که M منحنی مفروض را بپیماید خواهد پیمود. چنانکه مبدأ قوسها را در روی منحنی داده شده تغییر دهیم تمام منحنیات مطلوب را خواهیم داشت.

این منحنیات که عده آنها بینهایت میباشد به دولوپانتها موسوم بوده و باداشتن یکی از آنها میتوان تمام بقیه را بدست آورد بدین ترتیب که در روی هر قائم بر γ باید طول ثابت $\mu\mu' = r$ را نقل کرد. زیرا $r = -s + r = \overline{M\mu'} = \overline{M\mu}$ میباشد



با تغییر r تمام دولوباتها را خواهیم داشت .

دو منحنی γ و γ' حاصل را موازی نامند .

طریقه رسم دولوباتها - انتهای نخ

ش ۵۰

که بطول ϵ گرفته ایم بیک نقطه از منحنی C

ثابت کرده و آنرا روی این منحنی تکیه میدهیم . انتهای آزاد دیگر آن که ابتدا

در M_0 است در صفحه طوری حرکت میدهیم که نخ مزبور بمرور باز شده ولی همیشه

کشیده شده باشد . در هر لحظه قسمت باز شده $M_0 M$ دارای همان طول قوس $M_0 M$ بوده

و چنانکه سوی مثبت C را سوی باز شدن نخ بگیریم بستگی : $M_0 M = M M_0 = -s$

را خواهیم داشت پس از آنجا نقطه M دولوبات γ را خواهد پیمود . با تغییر طول

نخ تمام دولوباتها را خواهیم داشت .

۱۶۶ - محاسبه شعاع خمیدگی و مختصات مرکز خمیدگی - مختصات

نقطه M منحنی Γ را x و y و بر حسب پارامتر t فرض کرده میدانیم که :

$ds = \pm \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$ میباشد . + یا - بر حسب آنستکه سوی مثبت منحنی همان

سوی مقادیر صعودی t و یا نزولی آن باشد . چون $tg \varphi = -\frac{y'}{x'}$ است از دیفرانسیل

گرفتن آن : $d\varphi = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2 + y'^2} dt$ بدست آمده

و در نتیجه : $\rho = \epsilon \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''}$ خواهد شد .

چنانکه سوی مثبت روی Γ با سوی t های صعودی یکی باشد $\epsilon = +1$ خواهد بود .

چنانکه معادله منحنی بصورت $y = f(x)$ باشد $\rho = \epsilon \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$

خواهد شد .

C را مرکز خمیدگی گرفته مؤلفه های بردار \vec{MC} بترتیب

$\rho \cos(\varphi + \frac{\pi}{2})$ و $\rho \sin(\varphi + \frac{\pi}{2})$ و

و یا : $\rho \cos \varphi$ و $-\rho \sin \varphi$

خواهند بود . با استفاده از دستور های :

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} \quad \frac{dx}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \varphi$$

این مولفه ها بصورت : $-\frac{dy}{d\varphi}, \frac{dx}{d\varphi}$

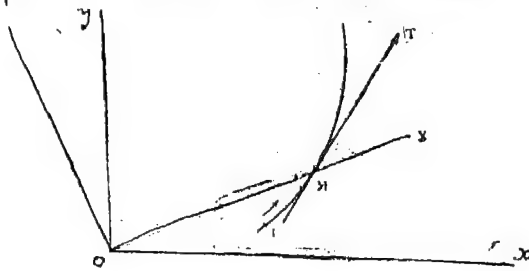
نوشته شده و چنانکه بجای $d\varphi$ مقدارش را قرار دهیم و مختصات C را X و Y فرض کنیم مولفه های \vec{MC} بصورت :

$$X - x = \frac{-y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''} \quad Y - y = \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''}$$

نوشته خواهند شد .

این معادلات همان معادلاتیکه نقطه مشخص قائم را میدادند بوده و قضیه شماره پیش بدین ترتیب نیز ثابت میگردد .

۱۶۷- خمیدگی در مختصات قطبی - منحنی r را راستا دار کرده MT را نیم



ش ۵۱

مماس مثبت نقطه M میگیریم .

φ را زاویه قطبی MT فرض

کرده محور OX را زاویه

قطبی θ مرور میدهم . ψ را

زاویه (OX, MT) گرفته :

$$\varphi = (Ox, ON) + (ON, MT) \quad \text{و یا} \quad \varphi = \theta + \psi$$

و در نتیجه : $\rho = \frac{ds}{d\theta + d\psi}$ خواهد بود .

برای محاسبه این مقدار میدانیم که : $\theta = \psi$ همیشه .

مولفه های شعاع خمیدگی \vec{MC} نسبت به OX و OY بترتیب :

$$\rho \sin \left(\psi + \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{و} \quad \rho \cos \left(\psi + \frac{\pi}{2} \right)$$

و یا $\rho \cos V$ و $-\rho \sin V$ بوده و چنانکه در نظر بگیریم که :

$$\sin V = \frac{r d\theta}{ds} \quad \text{و} \quad \cos V = \frac{dr}{ds} \quad \text{و} \quad \rho = \frac{ds}{d\varphi}$$

بصورت : $-\rho \frac{d\theta}{d\varphi}$ و $\frac{dr}{d\varphi}$ نوشته میشوند. از این فرمولها مختصات C

را در دستگاه XOY بدست آورده و بعد از آن در دستگاه xy حساب میکنیم.

۱۶۸ - دایره خمیدگی - تعریف - دایره خمیدگی در نقطه O واقع روی γ

دایره ایست که از O گذشته و مرکز آن مرکز خمیدگی باشد.

این دایره بدایره بوسان بمناسبت خواص زیر نیز موسوم میباشد.

قضیه - حد دایره که در نقطه O مماس بر γ بوده و از نقطه P نزدیک به O

بگذرد و قتیکه این نقطه بسمت O میل کند دایره خمیدگی خواهد بود.

O را مرکز مختصات و مماس در آنرا محور x گرفته دایره که در این نقطه

مماس به γ باشد بمعادله : $X^2 + Y^2 - 2rY = 0$ (۱) میباشد. r را

طوری تعیین میکنیم که این دایره از نقطه $P(x, y)$ نیز بگذرد از آنجا :

$$r = \frac{x^2}{2y} + \frac{y}{2}$$

میل کرده و حد $\frac{x^2}{2y}$ طول ρ مرکز خمیدگی میشود. زیرا با مفروضات فوق $\rho_0 = \frac{1}{y''}$

بوده و چون معادله منحنی $y = f(x)$ را بسط دهیم :

$$y = \frac{x^2}{2} f''(0) + \epsilon x^2$$

شده و در نتیجه حد $\frac{xy}{x^2}$ و قتیکه x بسمت صفر میل کند y'' خواهد شد و از آنجا ρ_0

حد $\frac{x^2}{2y}$ میباشد.

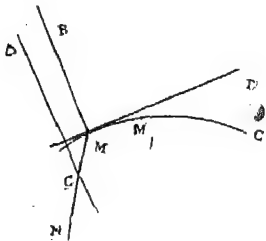
بخش پانزدهم

خمیدگی خمهای چپ

۱۶۹- اندیکاتوریس مماسها - خمیدگی - تعریف خمیدگی در مورد خمهای چپ یا فضائی نظیر تعریف خمیدگی در باره خمهای هائمنی میباشد.

منحنی فضائی (C) و قوس MM' آنرا فرض کرده مماسهای نقاط M و M' تشکیل زاویه ϵ که زاویه تماس نامیده میشود داده و نسبت $\frac{\epsilon}{\text{قوس } MM'}$ خمیدگی متوسط این قوس نامیده میشود. حد این نسبت وقتی که M' بسمت M میل نماید خمیدگی در نقطه M نیز نامیده میشود.

جهت تعریف خمیدگی جبری در مورد خمهای چپ منحنی را راستادار نموده s را طول منحنی الخط نقطه M و MT را نیم مماس مثبت این نقطه میگیریم. از نقطه O نیم خط OT را موازی MT و همسوی آن مرور داده نقطه برخورد آنرا با کره بمرکز O و بشعاع ρ ، نقطه π فرض میکنیم. چنانکه M منحنی (C) را پیمايد π منحنی

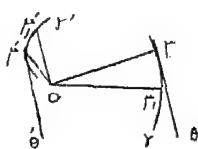


کروی (pi) را که اندیکاتوریس مماسها نامیده می شود خواهد پیمود. این اندیکاتوریس را نیز درسوی غیر مشخصی راستادار نموده π را طول منحنی الخط نقطه π میگیریم. بنابراین تعریف خمیدگی جبری منحنی (C) در نقطه M

$$\text{مقدار: } \frac{1}{R} = \frac{d\pi}{ds} \quad (۱)$$

$$R = \frac{ds}{d\pi} \quad \text{بوده و نیز مقدار:}$$

شعاع خمیدگی جبری نامیده میشود. حال ثابت میکنیم که قدر مطلق این خمیدگی جبری همان خمیدگی که



در بالا تعریف کردیم میباشد. بدین منظور نقطه M_1 را بینهایت نزدیک به M در روی (C) انتخاب کرده طول منحنی الخط آنرا Δs میگیریم. نقطه مربوطه بآن در روی اندیکاتریس μ_1 بوده این نقطه نیز بینهایت نزدیک به μ و دارای طول منحنی الخط $\Delta \sigma$ خواهد بود پس از آنجا زاویه تماس ϵ مربوط بقوس $M M_1$ مساوی زاویه $\mu_1 O \mu$ و یا مساوی طول قوس دایره عظیمه کره بین μ و μ_1 میباشد. حال این زاویه یک بینهایت کوچکی معادل قوس $\mu \mu_1$ اندیکاتریس یعنی $|\Delta \sigma|$ بوده و از آنجا نسبت $\frac{M M_1 \text{ قوس}}{\Delta s}$ دارای همان حد $\left| \frac{\Delta \sigma}{\Delta s} \right|$ خواهد بود. و این حد مساوی $\left| \frac{d\sigma}{ds} \right| = \left| \frac{1}{R} \right|$ نیز میباشد.

تبصره - چنانکه منحنی (C) هائمی باشد ادیکاتریس (μ) دایره بوده طول منحنی الخط σ همان زاویه قطبی μ نیم مماس MT خواهد بود. و از آنجا تعریف فوق بهمان تعریف خمیدگی در مورد خمهای هائمی تبدیل میشود.

۱۷۰ - قائم اصلی - مرکز خمیدگی - چنانکه نیم مماس مثبت (μ) منحنی (μ) را رسم کنیم این مماس واقع در صفحه مماس در μ بر کره (Σ) خواهد بود. پس امتداد آن عمود به (μ) و در نتیجه عمود به MT میباشد. چنانکه از نقطه M خط MN را موازی آن مرور دهیم این خط یکی از عمودهای منحنی (C) بوده و آنرا قائم اصلی مینامند. سوی مثبت روی قائم اصلی همان سوی مثبت امتداد (μ) خواهد بود.

حال دیده میشود که صفحه NMT بوسان نقطه M میباشد زیرا این صفحه موازی صفحه (μ) بوده و صفحه اخیر را میتوان حد صفحه $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ و قتیکه μ_1 بسمت μ میل نماید دانست. و چون $\mu_1 \mu_2$ موازی مماس بر (C) در نقطه M_1 است پس از آنجا بنا بر تعریف صفحه بوسان نتیجه فوق بدست میآید (شماره ۱۳۸) و نیز میتوان گفت که قائم اصلی که بدین ترتیب تعریف میشود قائم واقع در صفحه بوسان میباشد.

مرکز خمیدگی منحنی (C) در نقطه M نقطه C بوده و بدین ترتیب بدست میآید که در روی قائم اصلی MN طول MC را بطوریکه

$$(۲) \quad \overline{MC} = R$$

باشد نقل میکنیم.

دایره بمرکز C و شعاع R واقع در صفحه بوسان دایره خمیدگی نامیده میشود. محور این دایره یعنی خطیکه از نقطه C عمود بصفحه بوسان باشد محور خمیدگی و یا خط قطبی نامیده میشود.

عمود MB بصفحه بوسان که از M رسم شده باشد به بی نرمال موسوم است. سوی مثبت آنرا طوری انتخاب میکنند که سه وجهی MTNB، همسوی سه وجهی مقایسه باشد. این سه وجهی، سه وجهی Frenet و یا سه وجهی اصلی نقطه M نامیده میشود.

چنانکه نیم خط $O\mu$ را موازی MB و همسوی آن مرور دهیم کره Σ را در نقطه μ قطع کرده چنانکه M منحنی C را پییماید μ يك منحنی (μ) را که اندیکاتریس بی نرمال نامیده میشود خواهد پیمود.

حال ثابت میکنیم که مماس $\mu' \theta'$ موازی $\mu \theta$ میباشد. بدین منظور بترتیب (a, b, c) و (a', b', c') و (a'', b'', c'') را کوسینوسهای هادی MT و MN و MB میگیریم. این نه کوسینوس هادی توسط بستگی هائی که در مورد تغییر محورهای مختصات در فضا ذکر کردیم بهم مربوطند. مختصات نقطه μ بترتیب a'', b'', c'' بوده و از آنجا پارامترهای هادی $\mu' \theta'$ بترتیب a'', b'', c'' و $d a'', d b'', d c''$ خواهند بود. پس کافی است ثابت کنیم که $\mu' \theta'$ عمود به MT و MB بوده یعنی:

$$(۳) \quad a d a'' + b d b'' + c d c'' = 0$$

$$(۴) \quad a'' d a'' + b'' d b'' + c'' d c'' = 0$$

میباشند. حال معادله (۴) از فاصله گرفتن بستگی:

$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1$$

بدست آمده و معادله (۳) از فاصله گرفتن بستگی

$$a a'' + b b'' + c c'' = 0$$

یعنی از

$$(a d a'' + b d b'' + c d c'') + (a'' d a + b'' d b + c'' d c) = 0$$

بدست میآید. چون پراقتز دوم صفر میباشد زیرا MB عمود به $\mu\theta$ است پس از آنجا پراقتز اول نیز صفر خواهد بود.

حال $\mu'\theta'$ را همسوی $\mu\theta$ راستدار کرده و سوی مثبت روی (γ') را طوری انتخاب میکنیم که نیم مماس مثبت نقطه μ' آن $\mu'\theta'$ باشد. σ' را طول منحنی الخط μ' فرض کرده مقدار $\frac{1}{T} = \frac{d\sigma'}{ds}$ (۵) را تاب منحنی (C) در نقطه M نامند.

عکس این مقدار یعنی $T = \frac{ds}{d\sigma'}$ شعاع خمیدگی خوانده میشود.

تعریف تاب منحنی نظیر تعریف خمیدگی آن میباشد. چنانکه نقطه M_1 را روی (C) گرفته و نقطه μ'_1 مربوط بآن را روی (γ') در نظر بگیریم قوس $\widehat{\mu'\mu'_1} = \Delta\sigma'$ يك بینهایت كوچك معادل زاویه $(0\mu', 0\mu'_1) = \epsilon'$ میباشد.

حال این زاویه همان زاویه بین صفحات بوسان نقاط M و M_1 بوده و در نتیجه میتوان گفت که تاب منحنی در نقطه M حد نسبت $\frac{\epsilon'}{MM_1}$ قوس M_1 بسمت M میل کنند خواهد بود.

۱۷۱ - دستورهای فرقه - در اینجا مشتقات نه کوسینوسهای هادی که در

شماره پیش یاد آور شدیم نسبت به s حساب میکنیم.

چون مختصات نقطه μ بترتیب a, b, c هستند پس کوسینوسهای هادی $\mu\theta$

بترتیب: $c' = \frac{dc}{ds}$, $b' = \frac{db}{ds}$, $a' = \frac{da}{ds}$ خواهند شد.

و چون میتوان نوشت: $\frac{da}{ds} = \frac{da}{ds} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{da}{ds} \cdot R$

از آنجا: (۶) $\frac{da}{ds} = \frac{a'}{R}$, $\frac{db}{ds} = \frac{b'}{R}$, $\frac{dc}{ds} = \frac{c'}{R}$

میباشند. چون همین محاسبه را نسبت بنقطه $(\mu' (a'', b'', c'))$ تکرار کنیم

$$a' = \frac{da''}{ds} = \frac{da''}{ds} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{da''}{ds} \cdot T$$

شده و از آنجا: (۷) $\frac{da''}{ds} = \frac{a'}{T}$, $\frac{db''}{ds} = \frac{b'}{T}$, $\frac{dc''}{ds} = \frac{c'}{T}$

خواهند شد. برای محاسبه $\frac{da'}{ds}$ از بستگی $a'^2 + a''^2 + a'''^2 = 1$

مشتق میگیریم. بستگی حاصل

$$a \frac{da}{ds} + a' \frac{da'}{ds} + a'' \frac{da''}{ds} = 0$$

شده و چون روابط (۶) و (۷) را در نظر بگیریم این بستگی بصورت:

$$\frac{a a'}{R} + a' \frac{da'}{ds} + \frac{a'' a'}{T} = 0$$

نوشته شده و پس از بخش بر a' دستور های:

$$(۸) \quad \frac{da'}{ds} = -\frac{a'}{R} - \frac{a''}{T}, \quad \frac{db'}{ds} = -\frac{b'}{R} - \frac{b''}{T}, \quad \frac{dc'}{ds} = -\frac{c'}{R} - \frac{c''}{T}$$

را خواهیم داشت. دستور های (۶)، (۷) و (۸) بدستور های فرقه موسوم بوده. و چنانکه نه کوسینوس را داشته باشیم میتوان بوسیله آنها R و T را حساب نمود.

۱۷۲ - محاسبه شعاع خمیدگی - برای محاسبه R دستور های (۶) را

مجذور کرده و جمع میکنیم بستگی حاصل:

$$(۹) \quad \frac{1}{R^2} = \left(\frac{da}{ds} \right)^2 + \left(\frac{db}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dc}{ds} \right)^2$$

مقدار R را بما خواهد داد. چنانکه x و y و z را مختصات نقطه M بگیریم. میدانیم

که: $a = \frac{dx}{ds}$ و $b = \frac{dy}{ds}$ و $c = \frac{dz}{ds}$ بوده واز آنجا فرمول (۹)

$$(۱۰) \quad \frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2$$

را میتوان بصورت:

نیز نوشت.



بخش شانزدهم

مخروطات

۱۷۴ - مجموع نقاط حقیقی یا موهومی صفحه که مختصاتشان نسبت بدوممحور واقع در همان صفحه در معادله درجه دوم :

$$(۱) \quad f(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

صدق کنند منحنیات درجه دوم یا مخروطات نامیده میشوند. ضرایب این کثیرالجمله ممکن است حقیقی یا موهومی باشند ولی ما تمام آنها را اعداد حقیقی فرض نموده و نیز مجموع جملات درجه دوم آن یعنی $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ را به $q(x, y)$ نمایش میدهم. چنانکه این کثیرالجمله را بصورت همگن بنویسیم کثیرالجمله :

$$F(x, y, z) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2$$

بدست آمده و نصف مشتقات جزئی آن بترتیب :

$$(۲) \quad \frac{1}{2} F'_x(x, y, z) \equiv Ax + By + Dz$$

$$\frac{1}{2} F'_y(x, y, z) \equiv Bx + Cy + Ez$$

$$\frac{1}{2} F'_z(x, y, z) \equiv Dx + Ey + Fz$$

خواهد بود. دترمینان $\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$ ضرایب x و y و z مقادیر

فوق مین کثیرالجمله $f(x, y)$ و یا $F(x, y, z)$ نامیده شده و ما ضرایب

F, E, D, C, B, A را در بسط Δ بترتیب :

$$\begin{aligned} a &= CF - E^2 & c &= AF - D^2 & f &= AC - B^2 \\ b &= DE - BF & d &= BE - CD & e &= BD - AE \end{aligned}$$

مینامیم.

۱۷۴ - رده بندی منحنیات درجه دوم - نقاط بینهایت منحنی درجه دوم

که توسط معادله (۱) نمایش داده شده همان نقاط بینهایت امتداد های خطوطیکه

بمعادله :
$$(۲) \quad \eta(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$$

میباشند بوده این خطوط ممکن است حقیقی، موهومی مجزا و یا منطبق برهم باشند.

اولاً چنانکه $AC - B^2 > 0$ باشد معادله (۳) نمایش دو خط موهومی را

داده گویند معادله (۱) يك منحنی از نوع بیضی را نمایش میدهد.

ثانیاً چنانکه $AC - B^2 < 0$ باشد معادله (۳) دو خط حقیقی و مجزا را

نمایش داده گویند منحنی از نوع هذلولی میباشد.

ثالثاً چنانکه $AC - B^2 = 0$ باشد معادله (۳) دو خط منطبق برهم را

نمایش داده گویند منحنی از نوع شلجمی است.

و بطور خلاصه گویند يك منحنی درجه دوم از نوع بیضی، هذلولی و یا شلجمی

است بر حسب آنکه خط بینهایت را در دو نقطه موهومی، حقیقی و یا منطبق برهم قطع نماید.

باید یاد آور شد که شرط $AC - B^2 = 0$ لازم و کافی است برای آنکه

کثیرالجمله $\eta(x, y)$ مجذور کامل يك کثیرالجمله درجه اول $\ell x + my$ باشد

و از آنجا نتیجه میشود که معادله عمومی خم های نوع شلجمی را میتوان بصورت :

$$(\ell x + my)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

نوشت. نقاط بینهایت این منحنی منطبق بر نقطه بینهایت واقع در امتداد $(m, -\ell)$ میباشد.

مرکز يك مخروطی

۱۷۵ - تعریف - نقطه Ω را مرکز تقارن و یا بطور خلاصه مرکز يك منحنی Γ نامند چنانکه نقاط این منحنی دبدو نسبت بدین نقطه قرینه باشند.

برای آنکه نقطه Ω مرکز منحنی Γ باشد لازم و کافی است که نقاط برخورد هر خطی که از این نقطه مرور کرده باشد با منحنی نسبت باین نقطه قرینه باشند.

شرط آنکه مبداء مختصات مرکز يك مخروطی باشد - منحنی مخروطی Γ را بمعادله (۱) فرض کرده مختصات يك نقطه غیر مشخص از خط T_1 که از مبداء گذشته باشد چنانکه α و β را بارامترهای هادی این خط بگیریم بصورت α و β خواهند بود. مقادیر α مربوط بنقاط مشترك منحنی و این خط ریشه های معادله :

$$(1) \quad \rho^2 (A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2) + 2\rho(D\alpha + E\beta) + F = 0.$$

بوده برای آنکه مبداء مرکز منحنی باشد بایستی که معادله (۲) دارای دوریشه مخالف هم باشد و از آنجا لازم می آید که : $D\alpha + E\beta = 0$ باشد. چنانکه D و E هر دو صفر نباشند فقط خط $Dx + Ey = 0$ منحنی را در دو نقطه قرینه نسبت بمبداء قطع کرده و از آنجا لازم می آید که برای آنکه مبداء مختصات مرکز منحنی باشد بایستی که ضرایب D و E هر دو صفر باشند. پس از آنجا قضیه زیر را میتوان بیان نمود :

قضیه ۱ - برای آنکه مبداء مختصات مرکز يك منحنی درجه دوم باشد لازم و کافی است که معادله آن دارای عوامل درجه اول نباشد.

شرط آنکه يك نقطه مرکز مخروطی مفروض باشد - (x_0, y_0) را مختصات Ω فرض کرده چنانکه محورهای مختصات را بموازات خود باین نقطه منتقل نمائیم معادله خم Γ در دستگاه جدید : $f(x_0 + X, y_0 + Y) = 0$ شده و چنانکه این معادله را بر حسب دستور تیلور بسط دهیم معادله :

$$f(x_0, y_0) + Xf'_x(x_0, y_0) + Yf'_y(x_0, y_0) + \varphi(X, Y) = 0.$$

بدست آمده و برای آنکه مبداء جدید مرکز منحنی باشد لازم و کافی است که

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{و} \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

باشند و از آنجا قضیه زیر نتیجه میشود:

قضیه ۳- برای آنکه نقطه Ω مرکز منحنی درجه دوم $f(x, y) = 0$ باشد

لازم و کافی است که مختصات آن ریشه های معادلات: $f'_y(x, y) = 0$ و $f'_x(x, y) = 0$ باشند.

بحث در معادلات مرکز - مختصات مرکز از حل دستگاه

$$(۵) \quad \frac{1}{4} f''_{xx} \equiv Ax + By + D = 0$$

$$\frac{1}{4} f''_{yy} \equiv Bx + Cy + E = 0$$

بدست آمده و این معادلات را معادلات مرکز نامند هر کدام از آنها يك خط در صفحه را نمایش داده و این خطوط را خطوط مرکز نیز نامند.

۱- چنانکه $AC - B^2 = 0$ مخالف صفر باشد دستگاه (۵) دارای يك

ریشه بوده و خطوط مرکز متقاطع میباشند در اینحال منحنی C دارای يك مرکز بفاصله نزدیک بوده و مختصات آن: $x_0 = \frac{e}{f}$ و $y_0 = \frac{g}{f}$ خواهند بود.

۲- چنانکه $AC - B^2 = 0$ باشد دستگاه (۵) غیر ممکن و یا غیر مشخص میباشند.

حالت اول - دستگاه (۵) غیر ممکن است هرگاه خطوط مرکز موازی بوده

و یا آنکه طرف اول یکی از این معادلات مقدار ثابتی باشد در اینحال منحنی C دارای مرکز نخواهد بود.

حالت دوم - دستگاه (۵) غیر مشخص میباشند هرگاه خطوط مرکز برهم

منطبق بوده و یا آنکه یکی از معادلات (۵) بصورت يك اتحاد در آید. در اینحال

تمام نقاط يك خط Δ مراکز منحنی خواهند بود و چنانکه M نقطه از Γ باشد M'

قرینه این نقطه نسبت بنقطه از Δ روی Γ واقع خواهد بود و نیز قرینه های M نسبت

بتمام نقاط Δ روی منحنی واقع میباشند. حال قرینه های M نسبت بتمام نقاط Δ

نقاط مختلف خط D که از M موازی Δ رسم شده است میباشند.

پس از آنجا نتیجه میشود که هر گاه يك منحنی درجه دوم دارای يك خط مراکز باشد خطی که از يك نقطه M منحنی موازی آن رسم شود تماماً جزء منحنی بوده و در نتیجه این منحنی بدو خط D و D' موازی و قرینه خط مراکز تجزیه شده و بطور استثناء ممکن است D و D' بر خط مراکز نیز منطبق باشند.

۱۷۶ - رده بندی دیگر خمهای درجه دوم - رده اول خمهایی هستند که

دارای يك مرکز در فاصله نزدیک میباشند. این خمها از نوع بیضی یا هذلولی اند.

رده دوم خمهایی هستند که دارای مرکز نمیباشند.

رده سوم خمهایی هستند که دارای يك خط مراکز میباشند این دسته فقط

شامل دو خط موازی جدا و یا منطبق برهم میباشد.

مجموع خمهای دسته دوم و سوم خمهای نوع شلجمی میباشند.

حال بررسی اینکه در چه صورت معادله نوع شلجمی

$$(6) \quad (lx + my)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

نمایش يك منحنی از دسته دوم را خواهد داد میمائیم. بدینطور معادلات خطوط مرکز:

$$l(lx + my) + D = 0$$

$$m(lx + my) + E = 0$$

را نوشته بجای یکی از معادلات معادله $Dm - El = 0$ را میگیریم این معادله

از جمع دو معادله بالا پس از ضرب اولی در m و دومی در l بدست آمده و از آنجا

نتیجه میشود که هر گاه $Dm - El \neq 0$ باشد دستگاه معادلات مرکز غیر ممکن

و چنانکه این مقدار صفر باشد غیر مشخص خواهد بود. پس بطور خلاصه هر گاه معادلات:

$$lx + my = 0 \quad 2Dx + 2Ey + F = 0$$

نمایش دو خط متقاطع را بدهند معادله (۶) نمایش يك منحنی از رده دوم را داده و

چنانکه این خطوط دارای يك امتداد باشند نمایش يك منحنی از رده سوم را خواهد داد.

با فرض اخیر ضرایب D و E متناسب l و m بوده و از آنجا میتوان چنین نوشت:

$$Dx + Ey \equiv k(lx + my)$$

پس معادله يك منحنی از رده سوم را میتوان بصورت

$$(lx + my)^2 + 2k(lx + my) + F = 0 \quad \text{نوشت}$$

۱۷۷ - انتقال محورها بطوریکه مبداء مختصات بر مرکز منحنی منطبق

گردد - نقطه $\Omega (x_0, y_0)$ را مرکز منحنی مخروطی از رده اول یا سوم فرض کرده ΩX و ΩY را محورهای حاصل از محورهای اول توسط يك انتقال میگیریم. چنانکه بیشتر محاسبه کردیم معادله T' در دستگاه جدید:

$$\varphi(X, Y) + Xf'_x(x_0, y_0) + Yf'_y(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) = 0$$

بوده و چنانکه ملاحظه کنیم که: $f'_x(x_0, y_0) = 0$ و $f'_y(x_0, y_0) = 0$

میباشند این معادله بصورت $\varphi(X, Y) + f(x_0, y_0) = 0$

نوشته خواهد شد. در این معادله عوامل درجه دوم همان عوامل معادله داده شده میباشند. برای محاسبه $f(x_0, y_0)$ از بستگی اولر در مورد کثیرالجمله های ممکن استفاده میکنیم:

$$2f(x, y) \equiv xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) + f'_z(x, y)$$

برای محاسبه $f'_z(x, y)$ باید اول $f(x, y)$ را همگن نموده و بعد در مشتق آن نسبت به z بجای z يك را قرار دهیم پس از آنجا:

$$f'_z(x, y) \equiv 2Dx + 2Ey + 2F$$

بوده و چون در بستگی بالا بجای x و y مقادیر x_0 و y_0 را قرار دهیم:

$$f(x_0, y_0) = Dx_0 + Ey_0 + F$$

خواهد شد.

در حالتیکه مخروطی از رده اول باشد: $x_0 = \frac{d}{f}$ و $y_0 = \frac{e}{f}$ بوده

و از آنجا: $f(x_0, y_0) = \frac{Dd + Ee + Ff}{f}$ میباشد. چنانکه دیده

میشود صورت این کسر بسط دترمینان Δ نسبت بعوامل خط آخر بوده و در نتیجه معادله منحنی پس از انتقال مبداء مختصات بمرکز آن:

$$(7) \quad \varphi(X, Y) + \frac{\Delta}{f} = 0$$

خواهد شد.

۱۷۸ - شرط آنکه يك منحنی درجه دوم بدو خط تجزیه شود - قضیه -
برای آنکه معادله $(x, y) = 0$ نمایش يك منحنی تجزیه شده را بدهد لازم و کافی است که مین آن صفر باشد.

این شرط لازم میباشد - فرض کنیم که $= 0$ نمایش دو خط را بدهد در حالتیکه این دو خط متقاطع باشند تشکیل يك منحنی درجه دوم را که دارای يك مرکز است میدهند چنانکه محورهای مختصات را باین نقطه انتقال دهیم معادله بصورت (۷) در آمده و چون مرکز روی منحنی واقع است $\Delta = 0$ خواهد بود.
در حالتیکه خطوطیکه منحنی بآنها تجزیه میشود موازی یا منطبق بر هم باشند معادلات مرکز دارای ضرایب متناسب بوده و دترمینان Δ در اینحال هم صفر خواهد شد.

این شرط کافی است زیرا چنانکه $\Delta = 0$ باشد اگر منحنی از نوع بیضی یا هذلولی است معادله آن نسبت بمحورهاییکه از مرکز میگذرند بصورت :
 $\varphi(X, Y) = 0$ بوده و نمایش دو خط متقاطع را خواهد داد.

و چنانکه منحنی از نوع شایجی باشد (x, y) را میتوان بصورت کثیرالجمله :

$$(\ell x + m y)^2 + 2 D x + 2 E y + F$$

نوشت مین این کثیرالجمله :

$$\begin{vmatrix} \ell^2 & \ell m & D \\ \ell m & m^2 & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$
 بوده و چنانکه آنرا بسط دهیم:

$$\Delta = - (D m - E \ell)^2 : 4 \quad \Delta = - D^2 m^2 - E^2 \ell^2 + 2 D E \ell m$$

خواهد شد.

حال بنا بفرض $D m - E \ell = 0$ است در اینحال چنانکه دیدیم منحنی دارای يك خط مراکز بوده و از دو خط موازی و یا منطبق بر هم تشکیل میشود.

مسأله گردن معادله درجه دوم

۱۷۹ - میخواهیم ثابت کنیم که همواره ممکن است دو محور قائم مختصات

انتخاب نمود بطوریکه معادله هر منحنی تجزیه نشده درجه دوم بصورت یکی از معادلات زیر:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + 1 = 0 \quad \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad Y^2 = 2pX$$

در آمده و از آنجا نتیجه بگیریم که هر منحنی درجه دوم تجزیه نشده يك بیضی، هذلولی و یا شلجمی میباشد.

در صفحه دو محور قائم مختصات فرض کرده و معادله درجه دوم را نسبت باین دستگاه بصورت:

$$f(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

مبگیریم. برحسب رده‌ایکه منحنی بآن تعلق دارد چند حالت تشخیص میدهیم:

حالت اول - منحنی از رده اول میباشد - چنانکه معادله منحنی را پس از انتقال محور ها بمرکز آن بنویسیم معادله جدید:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \frac{\Delta}{f} = 0$$

خواهد شد. حال محور های مختصات را در حول مرکز بزاویه α دوران میدهیم. محور های جدید را ΩX و ΩY گرفته و زاویه α را طوری انتخاب میکنیم که در معادله حاصل ضرب XY صفر شود. دستور های تغییر مختصات:

$$x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha \quad y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha$$

بوده پس معادله منحنی در دستگاه جدید:

$$A_1 X^2 + 2B_1 XY + C_1 Y^2 + \frac{\Delta}{f} = 0$$

نوشته خواهد شد. مقادیر A_1 و B_1 و C_1 بترتیب مساوی:

$$A_1 = A \cos^2 \alpha + 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha$$

$$B_1 = -A \sin \alpha \cos \alpha + B (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + C \cos \alpha \sin \alpha$$

$$C_1 = A \sin^2 \alpha - 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha$$

میباشند. برای آنکه: $B_1 = 0$ باشد لازم و کافی است که:

$$(A - C) \sin 2\alpha = 2B \cos 2\alpha$$

$$(۸) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A-C} \quad \text{و یا:}$$

باشد. در حالت خاصیکه $A = C$ است $\cos 2\alpha = 0$ بوده و محورهای جدید در امتداد نیمسازهای محورهای قدیم خواهند بود.

برای محاسبه A_1 و C_1 مجموع و تفاضل این مقادیر را حساب میکنیم:

$$A_1 + C_1 = A + C \quad \text{و} \quad A_1 - C_1 = (A - C) \cos 2\alpha + 2B \sin 2\alpha$$

همیشند حال طبق (۸)

$$\cos 2\alpha = \frac{A - C}{\sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}} \quad \text{و} \quad \sin 2\alpha = \frac{2B}{\sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}}$$

$$A_1 - C_1 = \varepsilon \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2} \quad \text{و از آنجا:}$$

خواهد شد. و چون مجموع $A_1 + C_1$ و تفاضل $A_1 - C_1$ را میدانیم این مقادیر را میتوان حساب نمائیم.

و نیز ممکن است حاصل ضرب این مقادیر را حساب نمود بدینمنظور چون:

$$4A_1C_1 = (A_1 + C_1)^2 - (A_1 - C_1)^2$$

$$4A_1C_1 = 4(AC - B^2) \quad \text{شده و از آنجانب نتیجه میشود که نیز میتوان ضرایب } X^2 \text{ و } Y^2$$

معادله جدید را ریشه‌های معادله درجه دوم زیر گرفت:

$$S^2 - (A + C)S + AC - B^2 = 0$$

معادله ساده شده - پس میتوان با انتخاب يك دستگاه محورهای مختصات

جدید معادله هرمنحنی رده اول را بصورت

$$A_1 X^2 + C_1 Y^2 + \frac{\Delta}{f} = 0$$

نوشت. پس اگر منحنی بدوخط تجزیه نشود Δ مخالف صفر بوده و دو حالت برحسب

نوع منحنی تشخیص داده میشود:

۱- منحنی از نوع بیضی است - C_1 و A_1 هم علامت بوده و چنانکه این

علامت با علامت $\frac{\Delta}{f}$ یکی باشد میتوان تمام عوامل را بر $\frac{\Delta}{f}$ بخش نموده و معادله

را بصورت :

$$(۹) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

نوشت . a و b در اینحال ریشه های دوم اعداد $\frac{\Delta}{fA_1}$ و $\frac{\Delta}{fC_1}$ خواهند بود .
 منحنی که توسط این معادله نمایش داده شده است دارای هیچ نقطه حقیقی نبوده گویند نمایش يك بیضی موهومی را میدهد .
 چنانکه علامت $\frac{\Delta}{f}$ مخالف علامت A_1 و C_1 باشد میتوان تمام عوامل را بر $-\frac{\Delta}{f}$ بخش نموده و معادله را بصورت :

$$(۱۰) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

نوشت . a و b در اینحال ریشه های دوم اعداد $\frac{-\Delta}{fA_1}$ و $\frac{-\Delta}{fC_1}$ بوده و میدانیم که معادله (۱۰) نمایش يك بیضی حقیقی را میدهد . و بر حسب آنکه a بزرگتر و یا کوچکتر از b باشد محورهای کانونی آن ΩX و یا ΩY خواهند بود .

چنانکه $a = b$ باشد منحنی دایره بوده در اینحال $A = C$ و $B = 0$ است
 ۳- منحنی از نوع هذلولی است - در اینحال A_1 و C_1 دارای علامات مختلف بوده و چون فرض کنیم که علامت ضرب x^2 همان علامت $-\frac{\Delta}{f}$ میباشد پس از تقسیم تمام عوامل بر $-\frac{\Delta}{f}$ معادله بصورت :

$$(۱۱) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

نوشته میشود و چنانکه A_1 و $-\frac{\Delta}{f}$ مختلفالعلامه باشند پس از تغییر ΩX به ΩY و بالعکس باز همان نتیجه بدست خواهد آمد . در اینجا a و b جذرهای $\frac{-\Delta}{fA_1}$ و $\frac{\Delta}{fC_1}$ میباشد معادله (۱۱) يك هذلولی که محور کانونی آن ΩX است نمایش میدهد .

حالت دوم - منحنی از رده دوم می باشد - معادله آنرا میتوان بصورت :

$$\frac{1}{A} (Ax + By)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

با فرض آنکه $A \neq 0$ باشد نوشت :

محورهای مختصات را حول مبدأ O طوری دوران میدهیم که محور جدید Ox' بموازات امتداد مجانب قرار گیرد. Oy' را عمود بآب انتخاب میکنیم
 $(Ox, Oy) = \alpha$ بوده دستورهای تغییر مختصات :

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

خواهند بود . معادله منحنی پس از قراردادن این مقادیر بصورت زیر درخواهد آمد :

$$\frac{1}{A} [A(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) + B(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)]^2 + 2D(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) + 2E(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + F = 0$$

برای آنکه امتداد مجانب موازی محور Ox' باشد بایستی که ضریب x' در مجموع جملاتی که بقوه دو رسیده است صفر شود و یا آنکه

$$A \cos \alpha + B \sin \alpha = 0 \quad (12)$$

بصورت : $C_1 y'^2 + 2D_1 x' + 2E_1 y' + F = 0$ نوشته خواهد شد . در این معادله :

$$C_1 = \frac{(A \sin \alpha - B \cos \alpha)^2}{A} \text{ و } D_1 = D \cos \alpha + E \sin \alpha, E_1 = -D \sin \alpha + E \cos \alpha$$

میباشند . از بستگی (12) $\tan \alpha = -\frac{A}{B}$ بدست آمده و از آنجا دو نیم

خط جهت Ox' خواهیم داشت . یکی از آنها را انتخاب کرده و مقادیر

$$\cos \alpha = \frac{-B}{\epsilon \sqrt{A^2 + B^2}} \text{ و } \sin \alpha = \frac{A}{\epsilon \sqrt{A^2 + B^2}}$$

($\epsilon = \pm 1$) را از آنجا بدست میآوریم . چنانکه این مقادیر را بجای $\cos \alpha$ و $\sin \alpha$

در C_1 و D_1 قرار دهیم :

$$C_1 = \frac{A^2 + B^2}{A} \text{ و } D_1 = \frac{A E - B D}{\epsilon \sqrt{A^2 + B^2}}$$

خواهند شد. محاسبه E_1 لزومی نداشته و میتوان بهمین ترتیب حساب نمود.

ازطرفی $A E - B D = -e$ بوده و چون $A \Delta - e^2 = f$ و $f = 0$ است پس $\Delta = \pm \sqrt{-A \Delta}$ خواهد شد. و چون نیز $B^2 = A C$ است پس بالاخره:

$$C_1 = A + C \quad \text{و} \quad D_1 = \pm \sqrt{-\frac{\Delta}{A+C}}$$

میباشند. باید یاد آور شد که چنانکه معادله منحنی نمایش يك شلجمی را بدهد Δ مخالف صفر بوده و در نتیجه $D_1 \neq 0$ است.

و همچنین چون C و A هم علامتند پس $C_1 + A$ نیز صفر نخواهد بود.

حال محورهای مختصات را بموازات خود حرکت داده تا مبدا را بنقطه

(x_0, y_0) منتقل نماییم. معادله (۱۳) بصورت:

$$C_1 (y_0 + Y)^2 + 2 D_1 (x_0 + X) + 2 E_1 (y_0 + Y) + F = 0,$$

$$\text{و یا: } C_1 Y^2 + 2 D_1 X + 2 Y (C_1 y_0 + E_1) + C_1 y_0^2 + 2 D_1 x_0 + 2 E_1 y_0 + F = 0$$

نوشته خواهد شد. حال x_0 و y_0 را طوری تعیین میکنیم که ضریب Y و مقدار ثابت هر دو صفر باشند. یعنی

$$C_1 y_0 + E_1 = 0, \quad C_1 y_0^2 + 2 D_1 x_0 + 2 E_1 y_0 + F = 0$$

باشند. معادله اول مقدار y_0 را بماداده و از دومی x_0 بدست میآید پس از آنجا معادله

$$C_1 Y^2 + 2 D_1 X = 0, \quad \text{منحنی}$$

را که معادله يك شلجمی نسبت بمحور ومماس در رأس آنست بدست خواهیم آورد.

قدر مطلق $\frac{D_1}{C_1}$ پیرامتر شلجمی موسوم بوده و چنانچه آنرا به m نمایش

دهیم معادله منحنی: $Y^2 - 2 m X = 0$ خواهد شد. زیرا همیشه

میتوان سوی مثبت X را طوری انتخاب نمود که ضریب X منفی باشد. چنانکه

بجای C_1 و D_1 مقادیر شانرا قرار دهیم: $m = \sqrt{-\frac{\Delta}{(A+C)^2}}$ خواهد شد.

حالت سوم - منحنی از رده سوم میباشد - معادله آنرا بصورت:

$$(lx + my)^2 + 2h(lx + my) + F = 0$$

$$(lx + my + h)^2 = h^2 - F \quad \text{و یا}$$

نوشته. خطی که معادله آن $lx + my + h = 0$ است محور $X'X$ جدید میگیریم. X و Y را مختصات جدید نقطه گرفته:

$$Y^2 = \frac{(lx + my + h)^2}{l^2 + m^2}$$

خواهد شد. معادله منحنی در دستگاه جدید مختصات:

$$Y^2 = \frac{h^2 - F}{l^2 + m^2}$$

شده و چنانکه می بینیم از دو خط موازی تشکیل میشود. این دو خط حقیقی و متمایزند چنانکه $h^2 - F > 0$ باشد و در صورت عکس موهومی بوده و چنانکه $h^2 - F = 0$ باشد برهم منطبق خواهند بود.

پس همانطور که در پیش گفتیم مطالب بالا را خلاصه کرده و گوئیم که هر منحنی درجه دوم حقیقی و تجزیه نشده یک بیضی و یا یک هذلولی و یا یک شلجمی خواهد بود.

۱۸۰- شرط آنکه یک معادله درجه دوم نمایش یک هذلولی متساوی-

الساقین را بدهد - برای آنکه معادله:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

نمایش یک هذلولی متساوی الساقین را بدهد باید که معادله:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$$

دو خط عمود بهم را نمایش داده و در نتیجه: $A + C = 0$ باشد.

و برعکس چنانچه $A + C = 0$ باشد امتداد های بجانب منحنی برهم عمود بوده و منحنی یک هذلولی متساوی الساقین خواهد بود.

پس از آنجا نتیجه میشود که در صورت قائم بودن محورهای مختصات معادله:

$$A(x^2 - y^2) + 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

معادله کلی هذلولی های متساوی الساقین خواهد بود.

۱۸۱- معادله سه جمله مشترک مخروطات - نقطه برخورد هر مخروطی

با یکی از محورهای رأس نامیده شده و از آنجا دیده میشود که هر بیضی حقیقی دارای چهار رأس حقیقی و هر هذلولی دارای دو رأس و ششجملهی دارای يك رأس میباشد. حال یکی از این رأسهای حقیقی را مبداء مختصات گرفته محور Ox را محور یک از این رأس گذشته و Oy را مماس در این نقطه میگیریم. در این صورت بازاء هر مقدار x معادله منحنی دو مقدار مخالف هم y بآن مربوط بوده و از آنجا نتیجه میشود که این معادله شامل هیچ عامل درجه اول y نمیتواند باشد. از طرفی منحنی از مبداء مختصات گذشته و در نتیجه معادله آن مقدار ثابت نیز نخواهد داشت پس میتوان این معادله را بصورت $y^2 = 2px + q x^2$ نوشت. پس این معادله بازاء مقادیر مختلف p و q ، هر مخروطی را در مختصات قائم نمایش خواهد داد.

قطرها

۱۸۲ - نقاط برخورد مخروطی با يك خط - خمهایی که در این قسمت بررسی مینمائیم تجزیه نشده فرض کرده و نام مخروطی را بآنها اختصاص میدهیم. معادله مخروطی (C) را $f(x, y) = 0$ فرض کرده خط Δ را توسط مختصات (x_0, y_0) نقطه M_0 و پارامترهای هادی (α, β) آن که تصاویر بردار $\vec{M_0 B}$ فرض شده اند تعیین میکنیم.

مختصات يك نقطه M این خط را چنانکه دیدیم بصورت $x_0 + \rho \alpha, y_0 + \rho \beta$ با شرط آنکه $\vec{M_0 M} = \rho \cdot \vec{M_0 B}$ باشد میتوان نوشت. مقادیر ρ مربوط بنقاط برخورد Δ و (C) ریشه های معادله

$$(1) \quad f(x_0 + \rho \alpha, y_0 + \rho \beta) = 0$$

بوده و با استفاده از دستور تیلور برای کثیرالجمله های درجه دوم بصورت:

$$(2) \quad f(x_0, y_0) + \rho [\alpha f'_x(x_0, y_0) + \beta f'_y(x_0, y_0)] + \rho^2 q(\alpha, \beta) = 0$$

نوشته میشود. در این معادله نیز $q(x, y)$ مجموع عوامل درجه دوم خواهد بود. چنانکه امتداد Δ امتداد مجانب مخروطی نباشد $q(\alpha, \beta)$ مخالف صفر

بوده و خط Δ منحنی را در دو نقطه که ممکن است حقیقی، موهومی، مجزا و یا منطبق برهم باشند قطع خواهد کرد.

چنانکه مخروطی هذلولی و Δ یکی از امتداد های مجانب باشد معادله (۲) معمولاً درجه اول شده و برای آنکه این خط هذلولی را در هیچ نقطه بفاصله معین قطع نکند بایستی که Δ مجانب باشد. حال برای آنکه این شرط برقرار باشد لازم و کافی است که مختصات نقطه M_0 در معادله

$$(۳) \quad \alpha f'_x(x, y) + \beta f'_y(x, y) = 0$$

صدق نمایند.

پس از آنجا نتیجه میشود که چنانکه α و β پارامتر های هادی یکی از امتداد های مجانب باشد معادله (۳) معادله مجانب موازی آن امتداد خواهد بود.

۱۸۳ - قطر يك مخروطی - قضیه - مکان هندسی اوساط وترهائی موازی امتداد δ غیر مجانب، خطی که قطر امتداد δ نامیده میشود خواهد بود.

α و β را پارامتر های هادی امتداد δ فرض کرده برای آنکه $M(x, y)$ وسط وتری موازی δ باشد لازم و کافی است که خطی که از این نقطه موازی δ رسم میشود (C) را در دو نقطه P' و P'' قرینه نسبت به M قطع نماید. حال مقادیر ρ مربوط بنقاط P'' و P' از معادله :

$$f(x, y) + \rho [\alpha f'_x(x, y) + \beta f'_y(x, y)] + \rho^2 q(\alpha, \beta) = 0$$

بدست آمده و برای آنکه P' و P'' نسبت به M قرینه باشند لازم و کافی است که $\rho' + \rho'' = 0$ یعنی بستگی

$$(۴) \quad \alpha f'_x(x, y) + \beta f'_y(x, y) = 0$$

برقرار باشد. ρ' و ρ'' مقادیر ρ مربوط بنقاط P' و P'' میباشد.

حال معادله (۴) نمایش خطی در فاصله نزدیک را میدهد زیرا

$$f'_y(x, y) \equiv \varphi'_y(x, y) + 2E \quad f'_x(x, y) \equiv \varphi'_x(x, y) + 2D$$

بوده و معادله (۴) بصورت :

$$\alpha \varphi'_x(x, y) + \beta \varphi'_y(x, y) + \gamma D\alpha + \gamma E\beta = 0$$

نوشته میشود. چون φ تابع همگنی نسبت به x و y میباشد پس معادله بالا را میتوان

$$\text{بصورت : } x \varphi'_\alpha(\alpha, \beta) + y \varphi'_\beta(\alpha, \beta) + \gamma D\alpha + \gamma E\beta = 0$$

نیز نوشت. φ'_β و φ'_α هر دو در عین حال صفر نمیتوانند باشند زیرا در اینحال

$$\alpha \varphi'_\alpha + \beta \varphi'_\beta$$

نیز صفر شده و چون این مقدار طبق بستگی اولر مساوی

$$2\varphi(\alpha, \beta)$$

و بنا بفرض مخالف صفر است پس این دو مقدار نیز با هم صفر نخواهند بود.

تبصره - چنانکه m را ضریب زاویه امتداد δ فرض کنیم قطر این امتداد

$$\text{بمعادله : } f'_x(x, y) + m f'_y(x, y) = 0 \quad \text{خواهد بود.}$$

۱۸۴ - اقطار مخصوص - حال فرض کنیم $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ باشد امتداد δ

مجانب بوده و هر خط موازی آن منحنی را در یک نقطه واقع در بینهایت قطع خواهد

کرد. در اینحال قطر مزدوج وجود نداشته و معادله که ریشه های ρ را میدهد بصورت:

$$f(x, y) + \rho(\alpha f'_x + \beta f'_y) = 0$$

نوشته میشود. حال بررسی نموده می بینیم که معادله : (۵) $\alpha f'_x + \beta f'_y = 0$

و یا : $x \varphi'_\alpha + y \varphi'_\beta + \gamma(D\alpha + E\beta) = 0$ نمایش چه خطی را خواهد

داد. و چون بیضی دارای امتداد مجانب حقیقی نمیباشد این بررسی را فقط در مورد

هذلولی و شلجمی مینمائیم.

حالت اول - مخروطی از نوع هذلولی است - در اینحال

$$\frac{1}{\gamma} \varphi'_\beta = B\alpha + C\beta \quad \text{و} \quad \frac{1}{\gamma} \varphi'_\alpha = A\alpha + B\beta$$

بوده و چون $AC - B^2 \neq 0$ است پس φ'_β و φ'_α هر دو با هم صفر نبوده

و معادله (۵) نمایش یک خط Δ را میدهد.

این خط مکان نقاطی است بطوریکه اگر از یکی از آنها خطی موازی δ

رسم کنیم منحنی را در دو نقطه بینهایت قطع خواهد کرد.

حال دو خط δ و Δ موازی بوده زیرا

$$\alpha \varphi'_\alpha + \beta \varphi'_\beta = 2 \varphi(\alpha, \beta) = 0.$$

میباشد. پس از آنجا نتیجه میشود که تمام خطوطی که از نقاط مختلف Δ موازی δ رسم شده باشند بر این خط منطبق خواهند بود.

پس خط Δ تنها خطی است که موازی δ بوده و منحنی را در دو نقطه بینهایت قطع خواهد کرد و از آنجا دیده میشود که این خط، بجانب مربوط بامتداد بجانب δ میباشد.

پس میتوان بجانبهای هذلولی را قطرهای مخصوص بطوریکه هر کدام از آنها مزدوج امتداد خودش باشد فرض نمود.

حالت دوم - مخروطی از نوع شلجمی است - در اینحال φ را میتوان

بصورت: $\varphi(x, y) \equiv (u x + v y)^2$ نوشت و چون α, β پارامترهای هادی امتداد بجانب اند پس $u \alpha + v \beta = 0$ و در نتیجه:

$$\frac{1}{4} \varphi'_\alpha = u(u \alpha + v \beta) = 0 \quad \text{و} \quad \frac{1}{4} \varphi'_\beta = v(u \alpha + v \beta) = 0.$$

خواهند بود معادله ای که ریشه های y را میدهد در اینحال:

$$f(x, y) + 2 \varphi(D \alpha + E \beta) = 0.$$

بوده و میتوان گفت که در اینحال قطر مربوط به بینهایت رفته است. در نتیجه هر خط موازی امتداد بجانب یک شلجمی منحنی را در یک نقطه در بینهایت و در یک نقطه در فاصله نزدیک قطع خواهد نمود.

۱۸۵ - وضعیت افطار - قضیه ۱ - در خمهایی که دارای یک مرکز میباشند

هر قطر از مرکز گذشته و برعکس هر خط که از مرکز بگذرد یک قطر واقعی یا مخصوص خواهد بود.

زیرا مختصات مرکز در معادله یک قطر یعنی در معادله: $\alpha f'_x + \beta f'_y = 0$

صدق کرده و برعکس چون مرکز نقطه ایست که از هر خورد دو خط $f'_x = 0$ و $f'_y = 0$

بدست میآید پس هر خط که از این نقطه بگذرد بمعادله: $\alpha f'_x + \beta f'_y = 0$ بوده و این خط را میتوان قطر مزدوج امتدادی بیارامترهای هادی λ و μ فرض نمود. قضیه ۳ - درشالجمی تمام اقطار موازی امتداد مجانب بوده و برعکس هر خط که موازی امتداد مجانب باشد يك قطر خواهد بود.

چون معادله شالجمی بصورت:

$$f(x, y) \equiv (ux + vy)^2 + 2Dx + 2Ey + F$$

نوشته میشود پس

$$\alpha f'_x + \beta f'_y \equiv 2\alpha [u(ux + vy) + D] + 2\beta [v(ux + vy) + E]$$

خواهد شد. از آنجا معادله قطر مزدوج امتداد (α, β)

$$(u\alpha + v\beta)(ux + vy) + D\alpha + E\beta = 0$$

بوده و دیده میشود که این خط موازی امتداد مجانب میباشد.

و برعکس خط $ux + vy + \lambda = 0$ را موازی امتداد مجانب فرض

$$\frac{D\alpha + E\beta}{u\alpha + v\beta} = \lambda \quad \text{که } \beta \text{ را طوری انتخاب کنیم که}$$

باشد معادله خط مزبور بصورت معادله قطر مزدوج امتداد (α, β) نوشته خواهد شد. از این معادله α و β را با تقریب يك ضریب میتوان پیدا نمود.

۱۸۶ - خواص قطر ها - ۱ - نقاط تماس مماسهای موازی L يك مخروطی

همان نقاط برخورد منحنی و قطر مزدوج امتداد L میباشد.

نقطه $M(x, y)$ را روی مخروطی گرفته شرط آنکه مماس در این نقطه

موازی L باشد آنستکه: $\alpha f'_x + \beta f'_y = 0$ باشد. این بستگی

نشان میدهد که M روی قطر D مربوط بامتداد L واقع میباشد.

۲ - خطوط مرکز يك مخروطی قطرهای امتدادهای محورهای مختصات میباشد.

معادلات $f'_x = 0$ و $f'_y = 0$ مرکز قطر مزدوج امتداد Ox و Oy

را نمایش میدهند.

۳ - M و M' را نقاط تماس مماسهای وارد از نقطه P گرفته قطر مزدوج

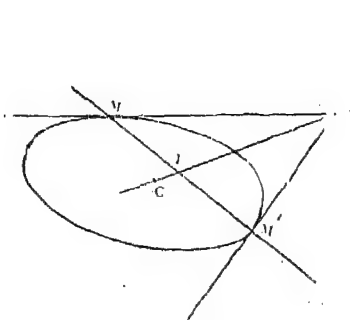
امتداد MM' از نقطه P خواهد گذشت.

x_0 و y_0 را مختصات P گرفته مختصات نقاط تماس یعنی M و M' از حل دو معادله :

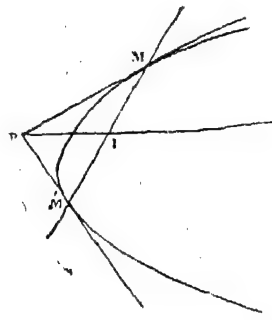
$$(1) f(x, y) = 0 \quad \text{و} \quad (2) (x_0 - x)f'_x + (y_0 - y)f'_y = 0$$

بدست میآیند. چون در این معادلات x و y را مختصات نقطه غیر مشخصی فرض کنیم دیده میشود که معادله (۱) نمایش منحنی مفروض و معادله (۲) نمایش يك خط را میدهند. پس میتوان گفت که نقاط تماس مماسهای خارج از يك نقطه P بر منحنی همان نقاط برخورد منحنی با يك خط که وتر تماس نامیده میشود خواهند بود. حال پس از محاسبه دیده میشود که میتوان يك دستگاه پارامترهای هادی این خط را مقادیر $\alpha = f'_y$ و $\beta = -f'_x$ گرفت و از آنجا قطر مزدوج این امتداد بمعادله : $f'_y f'_x - f'_x f'_y = 0$ خواهد بود. از این معادله دیده میشود که قطر مزدوج امتداد MM' از $P(x_0, y_0)$ میگذرد.

پس از آنجا نتیجه میشود که چنانکه منحنی دارای يك مرکز باشد خطی که نقطه P را بوسط I وتر MM' وصل میکند از مرکز خواهد گذشت. و چنانکه منحنی شایمی باشد خط PI موازی امتداد بجانب خواهد بود.



ش ۵۳



ش ۵۴

۱۸۷ - قطرهای مزدوج - چنانکه قطر مزدوج امتداد L موازی امتداد L'

باشد بالعکس نیز قطر مزدوج L' موازی L خواهد بود.

پارامترهای هادی L و L' را (α, β) و (α', β') گرفته معادله قطر مزدوج L

$$x \varphi'_\alpha + y \varphi'_\beta + z (D \alpha + E \beta) = 0$$

میباشد. چنانکه این خط موازی L' باشد $\alpha' \varphi'_\alpha + \beta' \varphi'_\beta = 0$ بوده و چون

این بستگی را بصورت: $\alpha \varphi'_\alpha + \beta \varphi'_\beta = 0$ بنویسیم دیده میشود که قطر مزدوج امتداد L' نیز که بمعادله:

$$x \varphi'_\alpha + y \varphi'_\beta + z (D \alpha' + E \beta') = 0$$

است موازی امتداد $L (\alpha, \beta)$ خواهد بود.

تعریف - دو امتداد بطوریکه قطر مزدوج یکی موازی دیگری باشد امتداد های مزدوج نامیده میشوند.

دو قطر بطوریکه هر کدام از آنها موازی وترهائی باشد که دیگری بدو قسمت مساوی تقسیم میکند قطرهای مزدوج نامیده میشوند.

پس از آنجا بستگی که پارامترهای هادی (α, β) و (α', β') دو امتداد و یا دو قطر مزدوج را بهم مربوط میکند:

$$\alpha' \varphi'_\alpha + \beta' \varphi'_\beta = 0 \quad \text{و یا} \quad \alpha \varphi'_\alpha + \beta \varphi'_\beta = 0$$

$$A \alpha \alpha' + B (\alpha \beta' + \beta \alpha') + C \beta \beta' = 0 \quad \text{و یا}$$

خواهد بود.

واضح است که این تعاریف فقط در مورد بیضی و هذلولی قابل قبولند.

چنانکه امتداد L توسط ضریب زاویه اش m معلوم باشد پارامترهای هادی

آنرا میتوان α و m گرفت و در نتیجه قطر مزدوج این امتداد بمعادله:

$$x (A + B m) + y (B + C m) + D + E m = 0 \quad \text{و یا} \quad x m' + y m = 0$$

خواهد بود. چنانکه ضریب زاویه خط اخیر را m' فرض کنیم مقدار آن

$$m' = -\frac{A + B m}{B + C m}$$

ضریب زاویه های دو امتداد مزدوج است نوشت:

$$C m m' + B (m + m') + A = 0$$

محورهای مخروطی

۱۸۸ - تعریف - محور مخروطی قطری است عمود بر وترهایی که آن قطر باید بدو قسمت مساوی تقسیم کند .

امتداد عمود بمحور را امتداد اصلی نامند . m را ضریب زاویه امتداد L فرض کرده قطر مزدوج این امتداد بضریب زاویه $m' = -\frac{A+B}{B+C} \frac{m}{m}$ میباشد . برای آنکه این قطر عمود بامتداد L باشد بایستی که $m' = -1$ و یا آنکه چنانچه بجای m' مقدارش را قرار دهیم :

$$(۱) \quad Bm^2 + (A - C)m - B = 0$$

باشد . ریشه های این معادله ضریب زاویه های امتداد های اصلی خواهند بود . بازاء هر ریشه حقیقی m_1 این معادله که ضریب زاویه امتداد مجانب نباشد يك محور عمود بامتداد m_1 مربوط بوده و معادله آن : $f'_x + m_1 f'_y = 0$ خواهد بود . معادله (۱) همیشه دارای ریشه های حقیقی و مجزا است زیرا که دو عامل اول و آخر مختلف علامه میباشد . بعلاوه حاصل ضرب ریشه های آن ۱- بوده و از آنجا نتیجه میشود که امتداد های اصلی حقیقی وعمود بهم میباشد .

و نیز امتداد های اصلی نیمساز های امتداد های مجانب میباشد .

۱۸۹ - معادله محور ها - m_1 و m_2 را ضریب زاویه های امتداد های اصلی

گرفته معادلات دو محور $f'_x + m_1 f'_y = 0$ و $f'_x + m_2 f'_y = 0$

میباشند . پس معادله مجموع آنها : $(f'_x + m_1 f'_y)(f'_x + m_2 f'_y) = 0$ (۲) خواهد بود . حال m_1 و m_2 ریشه های معادله (۱) بوده و چنانکه این معادله را بصورت : $(m - m_1)(m - m_2) = 0$ بنویسیم دیده میشود که

معادله (۲) از قرار دادن $-\frac{f'_x}{f'_y}$ بجای m در معادله اخیر بدست می آید . پس از آنجا برای بدست آوردن معادله مجموع محور های يك بیضی یا يك هذلولی کافی

است که در معادله (۱) بجای m مقدار $-\frac{f'_x}{f'_y}$ را قرار دهیم.

$$B f'_x{}^2 - (A - C) f'_x f'_y - B f'_y{}^2 = 0$$

نتیجه حاصل معادله :

حالت شلجمی - چون در شلجمی دو امتداد مجانب برهم منطبق اند نیمسازهای آنها یکی همان امتداد مجانب و دیگری خطی عمود بآن خواهد بود. پس از آنجا نتیجه میشود که ریشه‌های معادله (۱) ضریب زاویه‌های این امتدادها میباشد. در اینحال امتداد مجانب يك امتداد اصلی مخصوص بوده و بآن محوری مربوط نمیشد. در صورتیکه امتداد عمود بآن يك امتداد اصلی حقیقی بوده و محور مربوطه آن موازی امتداد مجانب است.

پس از آنجا میتوان گفت که در شلجمی فقط يك محور که قطر مزدوج امتداد عمود بامتداد مجانب است وجود خواهد داشت. از آنچه گفته شد نتیجه میشود که چنانکه معادله يك شلجمی :

$$f(x, y) \equiv \frac{1}{A} (Ax + By)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

باشد معادله محور آن : $A f'_x + B f'_y = 0$ خواهد شد.

* ۱۹ - راوس = محل برخورد هر محور و مخروطی را رأس مخروطی نامند. بر حسب خواص قطرهای مماس بر مخروطی در يك رأس عمود بر محوریکه از آن نقطه میگذرد خواهد بود.

بیضی و هذلولی هر کدام دارای چهار رأس بوده این چهار رأس در بیضی حقیقی و دوتای آنها فقط در هذلولی حقیقی میباشد.

در مورد شلجمی، محور موازی امتداد مجانب بوده و با منحنی در يك نقطه برخورد نموده و از آنجا شلجمی دارای يك رأس میباشد.

کانون و هادی

۱۹۱- تعریف - نقطه F را کانون مخروطی نامند هرگاه فاصله آن از هر نقطه

M مخروطی تابع خطی از مختصات M باشد یعنی بطوریکه :

$$(۱) \quad MF = |lx + my + h|$$

برحسب آنکه x و y را مختصات نقطه M بگیریم باشد.

باید یاد آور شد که این تعریف بستگی به محورهای مختصات نداشته زیرا چنانکه محورهای جدیدی انتخاب کنیم x و y توابع خطی از مختصات جدید x' و y' بوده و در نتیجه باز هم MF تابع خطی برحسب x' و y' خواهد بود.

چنانکه α و β مختصات F فرض شوند بستگی (۱) را میتوان بصورت :

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} &= |lx + my + h| \\ (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 &= (lx + my + h)^2 \end{aligned} \quad \text{و یا :}$$

نیز نوشت. چون این معادله از درجه دوم است و مختصات هر نقطه منحنی در آن نیز صدق میکند میتوان آنرا معادله مخروطی فرض نموده و نیز باید گفت که فقط مخروطات اند که تعریف کانون بدین طریق درباره آنها صادق میباشد.

خط هادی مربوط بیک کانون خطی است که معادله آن از مساوی صفر قرار دادن فاصله F تا یک نقطه M منحنی بدست آید. چنانکه بستگی (۱) بین F و M برقرار باشد خط هادی مربوط بکانون F بمعادله : $lx + my + h = 0$ خواهد بود.

۱۹۴- قضیه - نسبت فواصل هر نقطه مخروطی از کانون و از خط هادی مربوطه مقداری ثابت میباشد.

کانون مخروطی را F گرفته و $M(x, y)$ را نقطه از منحنی فرض میکنیم

چون : $MF = |lx + my + h|$ است و از طرفی فاصله MP نقطه M

$$\text{از هادی : } MP = \frac{|lx + my + h|}{\sqrt{l^2 + m^2}} \quad \text{میباشد پس : } \frac{MF}{MP} = \sqrt{l^2 + m^2}$$

بوده و از آنجا نتیجه میشود که این نسبت مقدار است ثابت. این نسبت را خروج از مرکز مربوط بکانون F نامند.

قضیه وارون - مکان نقاطیکه نسبت فواصلشان از یکنقطه ثابت F و يك خط D مقداری ثابت باشد يك مخروطی بکانون F و بخط هادی D خواهد بود.

محورهای مختصات را عمود بهم و از نقطه F طوری مرور میدهم که Oy موازی D و بمعادله $x - a = 0$ باشد. شرط آنکه نسبت فاصله نقطه $M(x, y)$ از مبدا O و از خط D مساوی عدد ثابت e باشد آنستکه:

$$x^2 + y^2 = e^2 (x - a)^2$$

باشد این شرط معادله مکان مطلوب و دیده میشود که نمایش يك مخروطی را میدهد. چون این معادله را بصورت:

$$x^2 (1 - e^2) + y^2 + 2ae^2x - a^2e^2 = 0$$

بنویسیم دیده میشود که مبین آن $a^2e^2 -$ بوده و از آنجا چنانکه a مخالف صفر باشد مکان مطلوب مخروطی واقعی خواهد بود چون $1 - e^2 = AC - B^2$ است پس اگر e کوچکتر، بزرگتر و یا مساوی يك باشد مخروطی بیضی، هذلولی و یا شلجمی خواهد شد. پس میتوان تعریف دیگر زیر را جهت کانون نمود:

نقطه F را کانون مخروطی گویند چنانکه بتوان خطی مثلاً D پیدا نمود بطوریکه نسبت فاصله هر نقطه منحنی از این نقطه و این خط مساوی مقدار ثابتی باشد.

۱۹۳ - طرز پیدا کردن کانونها - معادله منحنی را بصورت کلی

$$f(x, y) = 0 \quad (۱) \quad \text{نسبت به محوره های عمود بهم گرفته چنانکه نقطه } (a, \beta)$$

کانون آن باشد معادله این منحنی بصورت:

$$(۲) \quad (x - a)^2 + (y - \beta)^2 - (lx + my + n)^2 = 0$$

نیز نوشته میشود. و چون این دو معادله نمایش يك خم را میدهند پس باید ضرایب آنها باهم متناسب باشند و از آنجا پنج شرط برای پیدا کردن مقادیر a, β, l, m, n خواهیم داشت.

۱۹۴ - کانونهای يك بیضی - معادله بیضی را بصورت ساده شده

$$= 0 \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

آن بکار میبریم. بدین منظور باید مقادیر $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega$ را طوری پیدا نمود که معادله فوق بصورت (۲) نوشته شود و یا آنکه باید شش مقدار $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$ را بطوریکه در بستگی:

$$(۲) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \equiv S[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - (\zeta x + \eta y + \delta)^2]$$

صدق کنند پیدا نمود. ضریب $x y$ شرط: $S \zeta \eta = 0$ و یا $\zeta \eta = 0$ را بما داده و چون S مخالف صفر است از آنجا دو ریشه: $\zeta = 0$ و $\eta = 0$ بدست میآیند. چنانکه ریشه $m = 0$ را انتخاب کنیم ضرایب ζ^2 و η^2 بستگی های $S = \frac{1}{b^2}$ و $\beta = 0$ را بما خواهند داد. در نتیجه بقیه اتحاد بالا بصورت

$$\frac{x^2}{a^2} - 1 \equiv \frac{1}{b^2} [(x-\alpha)^2 - (\zeta x + \delta)^2]$$

نوشته شده و چون آنرا بصورت:

$$(۴) \quad x^2 \left(1 - \frac{\zeta^2}{a^2}\right) - 2\alpha\zeta x + \alpha^2 + \delta^2 \equiv (\zeta x + \delta)^2$$

بنویسیم بستگی $\alpha^2 - (\alpha^2 + \delta^2) \left(1 - \frac{\zeta^2}{a^2}\right) = 0$ نتیجه میشود از آنجا مقدار $\alpha^2 = a^2 - \delta^2$ و یا $\alpha = \pm c$ پس از قرارداد $c^2 = a^2 - \delta^2$ بدست میآید. و بالاخره بازاء هریک از مقادیر α معادله (۴) بصورت

$$a^2 - 2\alpha\zeta x + \frac{\alpha^2 x^2}{a^2} \equiv (\zeta x + \delta)^2$$

نوشته شده و میتوان مقادیر زیر را جهت ζ و δ نوشت: $\zeta = -\frac{\alpha}{a}$ و $\delta = a$

پس بطور خلاصه مقادیر

$$m = 0, \quad S = \frac{1}{b^2}, \quad \beta = 0, \quad \alpha = \pm c, \quad \zeta = -\frac{\alpha}{a}, \quad \delta = a$$

یکدستگاه جوابهای مسئله بوده و دستگاه دیگر که از شرط $\zeta = 0$ شروع میشود

مقادیر $S = \frac{1}{a^2}, \quad \alpha = 0, \quad \beta^2 = b^2 - a^2$ را بما خواهد داد

و چون $c > a$ است این دستگاه ریشه های حقیقی نداشته و دو کانون موهومی تعیین مینماید.

پس نتیجه میشود که هر بیضی دارای دو کانون حقیقی $F(c, 0)$ و $F'(-c, 0)$ واقع روی محور اطول بوده و خط هادی مربوط بهر کدام از آنها $(a - \frac{cx}{a} = 0)$ عمود بهمین محور خواهد بود. و بالاخره خروج از مرکز مربوط بهر کدام $e = \sqrt{1 + m^2} = \frac{c}{a}$ بوده و نیز دیده میشود که این مقدار کوچکتر از یک میباشد.

۱۹۵- شعاع حامل يك نقطه بیضی - F را یکی از کانونهای بیضی بمختصات $\alpha = \pm c$ و $\beta = 0$ فرض کرده چنانکه معادله بیضی را بصورت (۲) بنویسیم دیده میشود که فاصله هر نقطه $M(x, y)$ آن از

$$MF = \left| lx + my + n \right| = \left| a - \frac{cx}{a} \right|$$

میباشد. برای تعیین علامت طرف دوم این بستگی باید ملاحظه کرد که $\alpha = \pm c$ و x از حیث قدر مطلق هر دو کوچکتر از a بوده و از آنجا: $\frac{cx}{a} < a$ نیز خواهد بود. و در نتیجه $a - \frac{cx}{a}$ همیشه مثبت است. پس: $MF = a - \frac{cx}{a}$ میباشد.

۱۹۶- قضیه - مجموع فواصل هر نقطه بیضی از دو کانون مقداری ثابت و مساوی محور اطول میباشد.

دو کانون $F(c, 0)$ و $F'(-c, 0)$ را در نظر گرفته چنانکه دیدیم:

$$MF = a - \frac{cx}{a} \quad \text{و} \quad MF' = a + \frac{cx}{a}$$

بوده و در نتیجه $MF + MF' = 2a$ خواهد شد.

تبصره - از آنچه گفته شد نتیجه میشود که کانونهایی که بدین ترتیب برای مخروطات تعریف کردیم منطبق بر کانونهاییکه بطریق معمولی برای این منحنیات تعریف میکنند میباشد زیرا نظیر قضیه بالا را میتوان برای هذلولی و شلجمی نیز بهمان ترتیب ثابت نمود.

معادله مخروطات در مختصات قطبی

۱۹۷ - معادله عمومی مخروطات در مختصات قطبی - قطب را در يك

كانون و محور قطبی را منطبق بر محور كانونی فرض میکنیم. خط هادی هر مخروطی در این حال موازی Oy و بمعادله $x = -\epsilon$ بوده و از آنجا معادله هر مخروطی (۱۹۳)

$$x^2 + y^2 - e^2 (x + \epsilon)^2 = 0$$

خواهد بود. چنانکه این معادله را در مختصات قطبی بنویسیم بصورت:

$$\rho^2 - e^2 (\rho \cos \omega + \epsilon)^2 = 0$$

نوشته شده و دیده میشود که بدو معادله $\rho = \frac{e\epsilon}{1 - e \cos \omega}$ و $\rho = -\frac{e\epsilon}{1 + e \cos \omega}$

تجزیه میشود. این دو معادله هر دو نمایش يك منحنی را داده و چنانکه $e\epsilon$ را مساوی

در قرار دهیم معادله کلی مخروطات بصورت: $\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$ (۲)

نوشته خواهد شد.



بخش هفدهم

سطوح دوار - سطوح درجه دوم

۱۹۸ - تعریف - سطح دوار سطحی است که از دوران منحنی ثابتی حول محوری ایجاد شود.

G را منحنی مولد سطح و محور zz' را محور دوران گرفته هر نقطه M منحنی در این دوران دایره که مرکز آن H روی محور و صفحه آن عمود بر محور است مییماید. این دایره را مدار سطح نامند.

میتوان بنوبه خود سطح را حادث از حرکت این مدارات دانست. بدین ترتیب که سطح را مکان دوایر بکه دارای محور zz' بوده و روی منحنی G تکیه میکنند فرض میکنیم. چنانکه منحنی غیر مشخصی روی سطح بگیریم و آنرا حول zz' دوران دهیم باز همان سطح احداث خواهد شد. و بخصوص چنانکه این سطح را با صفحه که بر محور گذشته باشد قطع کنیم منحنی حاصل را نصف النهار نامند.

۱۹۹ - معادله پارامتری سطح - نصف النهار اصلی را منحنی واقع در صفحه xOz گرفته معادله آنرا $x = f(t)$ $z = g(t)$ (۱) فرض میکنیم. چون پس از دوران بزاویه φ این منحنی بوضع C قرار میگیرد، در صفحه که این نصف النهار در آن واقع است معادله آن نسبت به محورهای zOx همان معادله منحنی نسبت به محورهای xOz بوده و بنابراین خواهیم داشت:

$$(۲) \quad u = f(t) \quad z = g(t)$$

چون مختصات استوانه نقطه $M(u, \varphi, z)$ میباشد پس مختصات x, y, z

$$(۳) \quad x = f(t) \cos \varphi \quad y = f(t) \sin \varphi \quad z = g(t) \quad \text{همان نقطه:}$$

رأس گرفته معادلۀ نصف النهار مبداء $x = z \operatorname{tg} \theta$ بوده و از آنجا معادله مخروط $\sqrt{x^2 + y^2} = z \operatorname{tg} \theta$ خواهد شد.

طبق آنچه که گفتیم این فقط نصف مخروط بالای صفحه xy را نمایش داده قسمت دیگر آن بمعادله $\sqrt{x^2 + y^2} = -z \operatorname{tg} \theta$ بوده و مجموع دو قسمت توسط معادله $x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \theta$ نمایش داده میشود.

مثال ۲ - بیضوی دوار - نصف النهار در اینحال بیضی و محور دوران یکی از محورهای بیضی است چنانکه محور دوران محور کوچک بیضی باشد معادله

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad \text{نصف النهار}$$

بوده و در نتیجه معادله بیضوی

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad \text{خواهد شد. چنین بیضوی را پهن یا Aplati گویند.}$$

چنانکه محور دوران محور بزرگ بیضی باشد نصف النهار مبداء بمعادله :

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 \quad \text{بوده و معادله بیضوی نیز}$$

خواهد شد چنین بیضوی را کشیده یا allongé گویند.

مثال ۳ - هیپر بولونید دوار يك پارچه - نصف النهار هذلولی بوده محور

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad \text{دوران محور عمود بمحور کانونی بمعادله: می باشد.}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad \text{بس از آنچه که گفتیم معادله سطح خواهد بود. چنانکه}$$

این سطح را با صفحه $y = a$ قطع کنیم مقطع توسط معادلات

$$y = a \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad \text{و یا} \quad y = a \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

$$\text{و یا} \quad y = a \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 \quad \text{نمایش داده شده و این معادلات بدو دستگاه:}$$

$$y = a \quad \frac{x}{a} = -\frac{z}{b} \quad \text{و} \quad y = a \quad \frac{x}{a} = \frac{z}{b} \quad \text{تجزیه میشود.}$$

هر يك از این دو دستگاه نمایش يك خط مستقیم را داده و از آنجا مقطع از دو خط

که در روی مجانبهای نصف النهار مبداء تصویر میشوند تشکیل میشود.

از دوران هر کدام از این خطها سطح مزبور احداث شده گویند این سطح دارای دو دستگاه مولد مستقیم الخط میباشد. از هر نقطه سطح دو خط که هر کدام از یک دستگاه میباشد میگذرند.

و برعکس - چنانکه محور $z'z$ و خط غیر مشخص G که آنرا قطع نکرده و با آن نیز موازی نباشد مفروض باشند از دوران خط اخیر در حول محور $z'z$ باز همان سطح احداث خواهد شد.

برای اثبات کافی است که عمود مشترك این دو خط را محور y ها گرفته و طول آنرا برابر a فرض کنیم. خط G چون عمود به Oy است موازی صفحه xOz بوده و تصویر آن روی این صفحه از O خواهد گذشت. پس معادلات آن:

$$y = a \quad \frac{x}{a} = \frac{z}{b} \quad \text{میباشد. سطح حاصل از دوران آن حول } Oz \text{ طبق آنچه که گفتیم} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad \text{خواهد شد.}$$

پس از دوران يك خط در حول يك محور هیپر بولوئید دوار يك پارچه احداث شده و چنانچه این خط محور را قطع کرده یا موازی آن باشد سطح حاصل مخروط و یا استوانه خواهد شد.

مثال ۴ - هیپر بولوئید دوار دو پارچه - چنانکه محور دوران محور کانونی هذلولی باشد سطح حاصل از دو قسمت قرینه نسبت بصفحه عمود بمحور تشکیل شده و هیپر بولوئید دوار دو پارچه خواهد شد. معادله نصف النهار:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad \text{و معادله سطح:} \quad \frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{a^2} = 1$$

میباشد. این سطح چون از دو قسمت جداگانه تشکیل شده است دارای مولد مستقیم الخط نمیتواند باشد.

مثال ۵ - پارابولوئید دوار - سطح حاصل از دوران يك شلجمی حول محورش میباشد. معادله نصف النهار: $x^2 = 2pz$ و معادله سطح: $x^2 + y^2 = 2pz$ خواهد بود.

سطوح درجه دوم

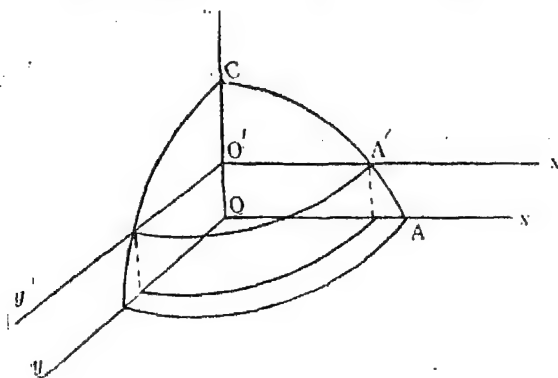
۴۰۱- ثابت میشود که چنانکه در سطوح پیش بجای مدارات، بیضی و یا هذلولیهای متشابه قرار دهیم عمومیترین سطوح درجه دوم را خواهیم داشت. صفحه منحنی مولد را صفحه xy و منحنی هادی را که در پیش نصف النهار مینامیدیم در صفحه xOz میگیریم. سطوحیکه بدین ترتیب بدست میآیند پس از بررسی حالات مختلفه پنج عدد میباشند.

۱- بیضوی - منحنی هادی در صفحه xOz بیضی بمعادله:

$$(۱) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{بوده برای تعیین مولد ها که در صفحات افقی واقعند}$$

بیضی واقع در صفحه $z = 0$ را فرض میکنیم. چون این بیضی باید روی منحنی هادی تکیه کند پس یکی از اواس آن نقطه A هادی بوده و چون نیم محور دیگر آنرا به ε نمایش دهیم معادله آن:

$$(۲) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



خواهد شد. يك مولد غير

مشخص در صفحه $x'O'y'$

بارتفاع z متجانس این

بیضی و دارای نیم محورهائی

متناسب آن بوده و چون

ش ۵۶

طول آنها را به ma و mb نمایش دهیم پس از ملاحظه آنکه یکی از این نیم محورها

$A'O'$ یعنی x نقطه A' بیضی (۱) مربوط بارتفاع z است بستگی:

$$m^2 = 1 - \frac{z^2}{c^2} \quad \text{و یا:} \quad m^2 a^2 = a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right)$$

را خواهیم داشت. حال تمام نقاط مولد مزبور در معادله:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = m^2 \quad \text{و یا:} \quad \frac{x^2}{m^2 a^2} + \frac{y^2}{m^2 b^2} = 1$$

صدق کرده و چون بجای m^2 مقدارش را قرار دهیم نتیجه میشود که هر نقطه سطح

در معادله: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}$ و یا: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (۲)

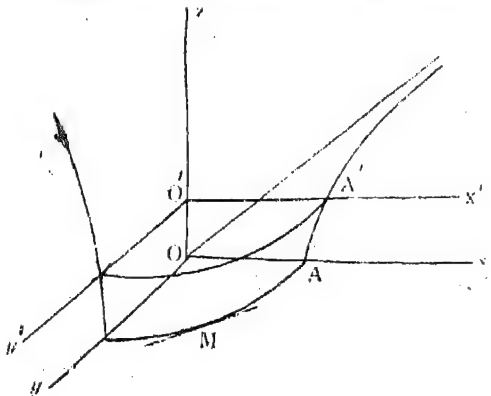
صدق خواهد کرد.

و برعکس - از آنچه گفته شد نتیجه میشود که هر نقطه که مختصات آن

در این معادله صدق کند روی مولد ارتفاع z واقع بوده و در نتیجه روی سطح واقع شده است. پس معادله (۳) معادله بیضوی است.

چنانکه دیده میشود صفحات مختصات تقارن سطح و محورهای مختصات محورهای تقارن میباشند.

۴ - هیپر بوئوئید يك پارچه - منحنی هادی در صفحه xOz هذلولی بوده



محور کانونی آن Ox و بمعادله

(۴) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

میباشد منحنی مولد در صفحه xOy

بیضی بمعادله

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

بوده يك رأس آن نقطه A هادی

میباشد. يك مولد غیر مشخص

معادله: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = m^2$ بوده و يك نیم محور آن بطول: $ma = O'A'$

یعنی x منحنی هادی خواهد بود. در اینجا: $m^2 a^2 = a^2 \left(1 + \frac{z^2}{c^2} \right)$

و یا: $m^2 = 1 + \frac{z^2}{c^2}$ شده و در نتیجه معادله سطح:

(۵) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ و یا: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2}$

خواهد بود. این سطح دارای همان عوازل تقارن بیضوی میباشد.

تبصره - این سطح نظیر حالتیکه $a = c$ یعنی دوار است شامل دو دسته بینهایت خط مستقیم میباشد. برای اثبات نقطه از بیضی مولد را بمختصات: $x = a \cos t$ $y = b \sin t$ در نظر گرفته و مماس بر آنرا در این نقطه در نظر میگیریم. معادله آن:

$$\frac{x}{a} \cos t + \frac{y}{b} \sin t = 1 \quad \text{و یا} \quad \frac{x - a \cos t}{-a \sin t} = \frac{y - b \sin t}{b \cos t}$$

میباشد. حال کوئیم مقطع سطح توسط صفحه قائمیکه از این مماس بگذرد از دو خط تشکیل میشود. این مقطع توسط دستگاه:

$$(۶) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2} \quad \text{و} \quad \frac{x}{a} \cos t + \frac{y}{b} \sin t = 1$$

تعیین گشته و چنانکه آنرا بر حسب $\frac{x}{a}$ و $\frac{y}{b}$ حل کنیم معادله حاصل برای $\frac{x}{a}$

$$\frac{x^2}{a^2} - 2 \cos t \frac{x}{a} + 1 = \left(1 + \frac{z^2}{c^2} \right) \sin^2 t \quad \text{بصورت:}$$

$$\left(\frac{x}{a} - \cos t \right)^2 = \frac{z^2}{c^2} \sin^2 t \quad \text{و یا:}$$

$$\frac{x}{a} - \cos t = \pm \frac{z}{c} \sin t \quad \text{و بالاخره:}$$

نوشته میشود. معادله حاصل برای $\frac{y}{b}$ از دومین معادله دستگاه (۶) بدست آمده و محاسبه آن:

$$\frac{y}{b} \sin t = 1 - \frac{x}{a} \cos t = 1 \mp \frac{z}{c} \sin t \cos t - \cos^2 t = \sin t \left[\mp \frac{z}{c} \cos t + \sin t \right]$$

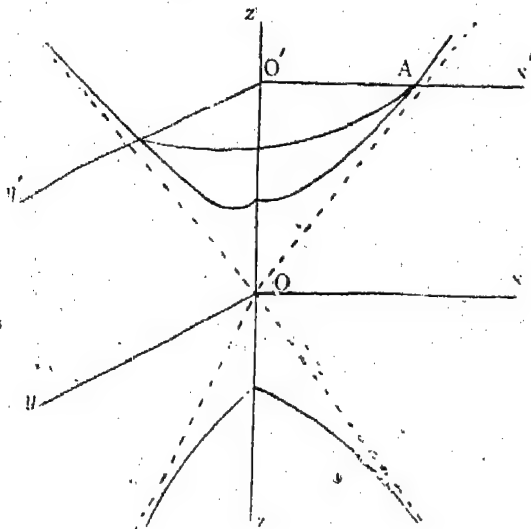
میباشد. پس دستگاه (۶) بدو دستگاه

$$(۷) \quad \frac{x}{a} = + \frac{z}{c} \sin t + \cos t \quad \text{و} \quad \frac{y}{b} = - \frac{z}{c} \cos t + \sin t$$

$$(۸) \quad \frac{x}{a} = - \frac{z}{c} \sin t + \cos t \quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \cos t + \sin t$$

تجزیه شده و چنانکه می بینیم نمایش دو خط را میدهد. این دو خط نسبت بصفحه xy قریبه بوده و چنانکه t را تغییر دهیم دو دستگاه مولد مستقیم الخط خواهیم داشت.

۳- هیپر بولوئید دو پارچه - منحنی هادی هذلولی بوده محور کانونی آن



$$0z \text{ و بمعادله } \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

میباشد.

معادله کلی مولد ها بصورت :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = m^2$$

بوده و چنانکه مثل پیش حساب

کنیم معادله سطح :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

خواهد شد.

۴- پارابولوئید بیضوی -

ش ۵۸

منحنی هادی شلجمی بمحور 0z

و بمعادله $x^2 = 2pZ$ بوده مولد های افقی بیضی هائی بمعادله کلی :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = m^2$$

میباشند. در مولد بارتفاع z :

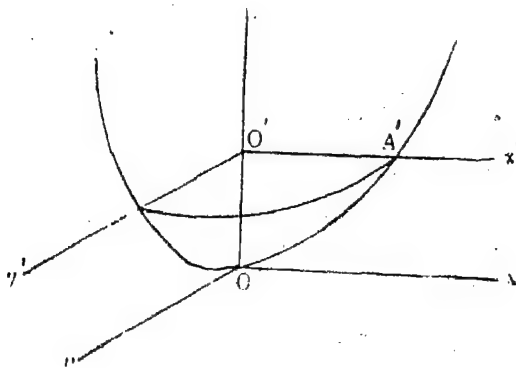
$$O'A'^2 = m^2 a^2 = 2pZ$$

بوده و از آنجا : $m^2 = \frac{2pZ}{a^2}$

خواهد شد. پس معادله سطح :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2pZ}{a^2}$$

چنانکه قرار دهیم $\frac{a^2}{b^2} = \frac{p}{q}$



ش ۵۹

معادله سطح را میتوان بصورت : $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2Z = 0$ نیز نوشت.

مقطع این سطح با صفحه 0z و شلجمی $2qZ$ و میباشند.

۵- پارابولوئید هیپر بولیک - منحنی هادی همان شلجمی $x^2 = 2pZ$

بوده ولی مولد ها در این حال هذلولی میباشند.

معادله کلی آنها: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = m^2$ و این رابطه برای مولد

ارتفاع z برقرار است:

$$m^2 a^2 = O'A'^2 = 2pz$$

پس: $m^2 = \frac{2pz}{a^2}$ و معادله

$$\text{سطح: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2pz}{a^2}$$

$$\text{و یا: } \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z = 0$$

$$\text{پس از قرار دادن: } \frac{a^2}{b^2} = \frac{p}{q}$$

خواهد شد.

چنانکه z از صفر تا ∞ +

تغییر نماید مقطع سطح که در

اول فقط از دو مجانب تشکیل میشود بمرور بزرگ شده و راوس A' و A'' به بینهایت میروند.

ولی يك قسمت دیگر سطح هم هست که بامعادله فوق نمایش داده شده و بازاء مقادیر z منفی میباشد. مقاطع افقی که بازاء این مقادیر z گرفته شوند هذلولی هائی بمعادله: $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = m^2$ بطوریکه $m^2 = -2z$ باشد خواهند بود.

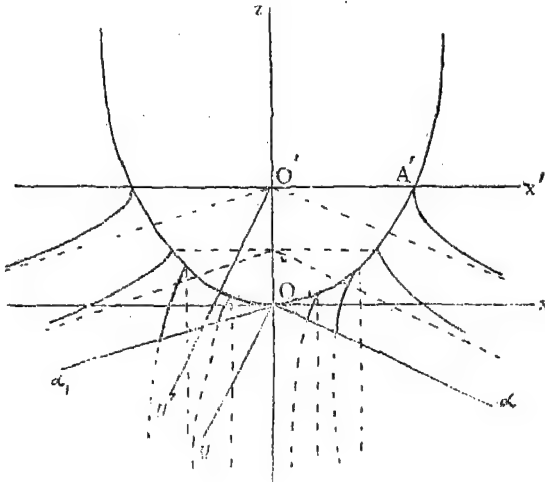
مجانبهای آنها همان امتداد را داشته ولی زوایائی که در آنها خمها واقعند متفاوت است. و نیز راوس این هذلولیها روی شلجمی $xy = -2qz$ که مقطع سطح باصفحه $x=0$ میباشد واقع خواهند بود.

مقاطع این سطح باصفحات $x = \beta = C \text{ to}$ شلجمی های

$$z = \frac{\beta^2}{2p} \quad xy = -2q \left(z - \frac{\beta^2}{2p} \right)$$

آنها روی شلجمی مفروضمان واقع میباشند.

پس میتوان این سطح را از انتقال شلجمی ثابتی روی شلجمی دیگر بطوریکه



ش ۶۰

رأس آن روی شلجمی ثابت لغزیده و صفحه آن عمود بصفحه شلجمی ثابت و محور آن موازی محور شلجمی ثابت باشد دانست .

تبصره ۱ - پارابولونید هیپر بولیک شامل دودسته خط میباشد و هردسته خط موازی يك صفحه ثابت بوده و این دودسته را صفحه های هادی سطح نامند . معادله این صفحه ها از صفر کردن مجموع جملات درجه دوم در معادله سطح یعنی :

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0 \quad \text{بدست آمده و از آنجا دو صفحه:} \quad \frac{x}{\sqrt{p}} \pm \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$$

نتیجه میشود .

ثابت میشود که اولاً هر صفحه موازی یکی از این صفحات ، سطح را در طول

يك خط مستقیم قطع مینماید . زیرا صفحه موازی

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = \lambda \quad \text{بمعادله} \quad \text{بوده و مقطع توسط دستگاه:}$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) - 2z = 0 \quad \text{و} \quad \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = \lambda$$

نمایش داده میشود . حال این دستگاه معادل :

$$\lambda \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} \right) - 2z = 0 \quad \text{و} \quad \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = \lambda$$

بوده و دیده میشود که نمایش يك خط را میدهد . و همچنین است برای صفحه دوم .

تبصره ۲ - پارابولونید را متساوی الساقین گویند چنانکه دو شلجمی اصلی

متساوی باشند یعنی $p = q$ باشد . مقاطع افقی در اینحال هذلولیهای متساوی الساقین

بوده و معادله سطح : $x^2 - y^2 - 2pz = 0$ میباشد . چنانکه در اینحال محور

های مختصات را محور Oz و دو خط $O\alpha_1$ و $O\alpha_2$ که تصویر مجانبها روی Oxy و در

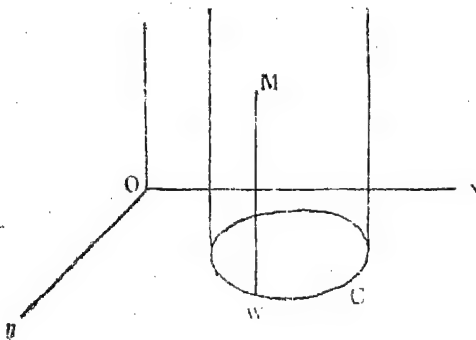
اینحال نیمسازهای زاویه xOy هستند بگیریم ، دستورهای تبدیل مختصات

$$x = X \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - Y \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)$$

$$y = X \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + Y \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-X + Y) \quad z = Z$$

خواهند بود و از آنجا معادله سطح بصورت $XY - pZ = 0$ نوشته میشود .

۴۰۲- استوانه - استوانه موازی Oz در نظر گرفته برای آنکه نقطه M



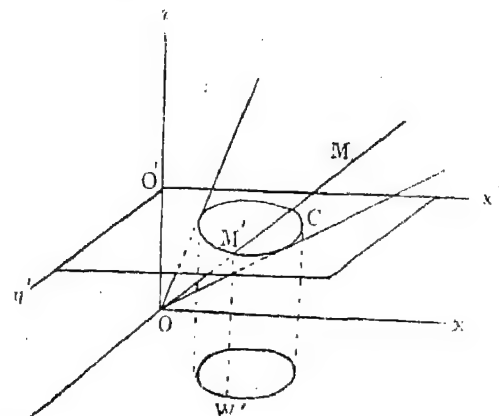
ش ۶۱ .

روی آن واقع باشد لازم و کافی است که تصویر W آن بر xOy در روی اثر C استوانه واقع باشد. معادله C را در صفحه xOy بصورت : $F(x, y) = 0$ گرفته چون مختصات (x, y) نقطه W همان مختصات x و y نقطه M اند پس این معادله شرط آنکه M

روی استوانه باشد بیان کرده و از آنجا معادله استوانه خواهد بود.

پس معادله هر استوانه که مولدهای آن عمود یکی از صفحات مختصات باشند همان معادله اثر استوانه روی این صفحه خواهد بود.

۴۰۳ - مخروط - مخروطی را توسط رأس و منحنی هادیش C فرض کرده مبدا O را در رأس و منحنی C را مسطحه و موازی صفحه xOy نیز میگیریم. معادله



ش ۶۲

این منحنی $z = c$ $\psi(x, y) = 0$ بوده و چون تصویر این منحنی روی xOy مساوی همان C در صفحه $x'O'y'$ است پس معادله آن در این صفحه $\psi(x', y') = 0$ خواهد بود.

نقطه $M(x, y, z)$ را روی مخروط گرفته و $M'(x', y', c)$ را اثر OM روی $x'O'y'$ فرض میکنیم. چون M و M' و O روی

یک خط واقعند پس : $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{c}{z}$ بوده و از آنجا : $x' = c \frac{x}{z}$ و $y' = c \frac{y}{z}$

خواهند بود. چون M روی مخروط است پس M' روی C بوده و از آنجا لازم میآید که: $\psi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ باشد. پس این معادله معادله مخروط خواهد بود. چنانکه دیده میشود این معادله نسبت به x, y, z همگن میباشد. و برعکس هر معادله همگن از x و y و z نمایش يك مخروط که رأس آن در مبدا مختصات است نمایش میدهد.

زیرا که میتوان معادله آنرا بصورت: $\psi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ نوشته و چنانکه دیدیم این معادله مخروطی که رأس آن O و هادی آن منحنی $\psi(x, y) = 0$ است نمایش میدهد.

۴۰۴ - مخروطهای درجه دوم - هر مخروط درجه دوم چنانکه مبدا را به رأس آن منتقل کنیم معادله بصورت:

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B'yz + 2B'zx + 2B''xy = 0$$

خواهد داشت. مقطع این مخروط توسط يك صفحه يك منحنی درجه دوم خواهد بود. زیرا میتوان صفحه قاطع را موازی xy فرض کرده و در اینحال معادله مقطع:

$$z = c, \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B'yz + 2B'zx + 2B''xy = 0$$

$$\text{و یا: } z = c, \quad Ax^2 + 2B''xy + A'y^2 + 2B'cx + 2B'cy + A''c^2 = 0$$

خواهد بود. معادله دوم نمایش تصویر منحنی روی Oxy را نیز داده و چون از درجه دوم است پس قضیه ثابت میشود. پس میتوان این قضیه را بدین ترتیب نیز بیان نمود: منحنی هادی هر مخروط درجه دوم يك بیضی، هذلولی و یا شلجمی میباشد. و برعکس هر مخروط بر رأس O و منحنی هادی درجه دوم واقع در صفحه $z = c$ دارای معادله از درجه دوم خواهد بود.

پایان

فهرست

صفحه

۱	بخش نخست - بردارها
۱	چندپهای راستادار
۴	جمع هندسی
۸	تساوبر
۱۱	حاصل ضرب داخلی یا اسکالر
۱۵	حاصل ضرب خارجی یا برداری
۲۱	همگنی
۲۲	مشتق هندسی
۲۵	بخش دوم - مختصات
۴۳	بخش سوم - خط و سطح
۵۰	بخش چهارم - مکان هندسی
۵۴	بخش پنجم - خط در صفحه
۶۲	مسائل مربوط به خط مستقیم
۶۸	بخش ششم - صفحه و خط در فضا
۶۸	صفحه
۷۶	خط در فضا
۷۹	بخش هفتم - دایره
۸۵	بخش هشتم - کره

۸۹	بخش نهم - خط مماس - صفحه مماس
۹۹	بخش دهم - بررسی يك منحنی در نزدیکی یکی از نقاط آن
۱۰۹	بخش یازدهم - رسم منحنیات
	۱ - رسم منحنی که معادله آن بصورت $y = f(x)$
۱۰۹	داده شده باشد
	۲ - رسم منحنی که معادله آن بصورت پارامتری
۱۱۷	داده شده باشد
۱۲۳	۳ - رسم منحنی که معادله آن تابع ضمنی از x و y باشد
۱۳۱	بخش دوازدهم - رسم خمهای قطبی
۱۳۹	بخش سیزدهم - پوش ها
۱۴۴	بخش چهاردهم - خمیدگی خمهای هائمی
۱۵۳	بخش پانزدهم - خمیدگی خمهای چپ
۱۵۸	بخش شانزدهم - مخروطات
۱۶۰	مرکز يك مخروطی
۱۶۴	ساده کردن معادله درجه دوم
۱۷۱	قطر ها
۱۷۸	محور های مخروطی
۱۸۰	کانون و هادی
۱۸۴	معادله مخروطات در مختصات قطبی
۱۸۵	بخش هفدهم - سطوح دوار - سطوح درجه دوم
۱۸۹	سطوح درجه دوم

०३९६ DATE DUE ०१५

This book is due on the date
last stamped. A fine of 1 anna
will be charged for each day the
book is kept over time.

१०७.११.३१.

१९८५

059E

014

~~1565~~

ہندو کیلی

[illegible]